闭区间上连续函数的性质

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

定义 (最大值与最小值)

对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值 (最小值)**.

定义 (最大值与最小值)

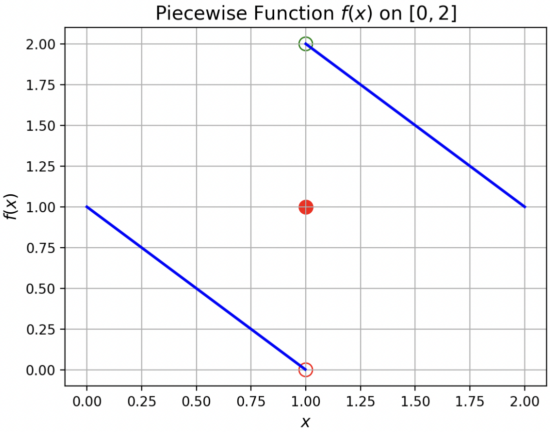
对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值 (最小值)**.

- 函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[-1,1]$ 上有最大值 1, 最小值 0.
- 函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-1,1)$ 上无最大值, 有最小值 0.

- 闭区间上的不连续函数不一定存在最大值或最小值.



定理 1 (有界性与最大最小值定理)

在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值与最小值.

如果 x_0 使得 $f(x_0)=0$, 那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 2 (零点定理)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号 (即 $f(a)\cdot f(b)<0$), 则在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使得

$$f(\xi)=0.$$

- 几何解释: 连续曲线连接 x-轴上、下两侧的点必定与 x-轴相交.

定理 3 (介值定理)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且在这区间端点取不同的函数值

$$f(a) = A \quad 及 \quad f(b) = B,$$

则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C, 在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使得

$$f(\xi) = C \quad (a < \xi < b).$$

定理 3 (介值定理)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且在这区间端点取不同的函数值

$$f(a)=A \quad 及 \quad f(b)=B,$$

则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C, 在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使得

$$f(\xi)=C \quad (a<\xi<b).$$

- 不妨设 $A<B$，任取一 $C\in(A,B)$，定义 $\varphi(x)=f(x)-C$，对函数 φ 在区间 $[a,b]$ 上应用零点定理即得到结论.

定理 3 (介值定理)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且在这区间端点取不同的函数值

$$f(a)=A \quad \text{及} \quad f(b)=B,$$

则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C, 在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使得

$$f(\xi)=C \quad (a<\xi<b).$$

- 不妨设 $A<B$, 任取一 $C\in(A,B)$, 定义 $\varphi(x)=f(x)-C$, 对函数 φ 在区间 $[a,b]$ 上应用零点定理即得到结论.
- 几何意义: 连续曲线弧 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ 至少相交于一点.

推论

在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 的值域为闭区间 $[m,M]$, 其中 m 和 M 依次为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值.

例 1

证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

例 1

证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证明.

函数 $f(x)=x^3-4x^2+1$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=1$, $f(1)=-2$, 故 $f(0)\cdot f(1)<0$.

例 1

证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证明.

函数 $f(x)=x^3-4x^2+1$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=1$, $f(1)=-2$, 故 $f(0)\cdot f(1)<0$. 由零点定理知, 至少存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=0$, 即

$$\xi^3-4\xi^2+1=0 \quad (0<\xi<1),$$

例 1

证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证明.

函数 $f(x)=x^3-4x^2+1$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=1$, $f(1)=-2$, 故 $f(0)\cdot f(1)<0$. 由零点定理知, 至少存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=0$, 即

$$\xi^3-4\xi^2+1=0 \quad (0<\xi<1),$$

因此方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根. □

随堂练习

证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证明.

(1) 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, 其中 A 为常数.

证明.

(1) 设 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$, 其中 A 为常数. 由函数极限定义, 取 $\epsilon = 1$, 存在正常数 $X > 0$, 当 $x > |X|$ 时

$$|f(x) - A| < 1,$$

证明.

(1) 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, 其中 A 为常数. 由函数极限定义, 取 $\epsilon = 1$, 存在正常数 $X > 0$, 当 $x > |X|$ 时

$$|f(x) - A| < 1,$$

故

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \le |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|, \quad \forall |x| > X.$$

证明.

(1) 设 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$, 其中 A 为常数. 由函数极限定义, 取 $\epsilon = 1$, 存在正常数 $X > 0$, 当 $x > |X|$ 时

$$|f(x) - A| < 1,$$

故

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \le |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|, \quad \forall |x| > X.$$

(2) 又因为 $f(x)$ 在区间 $[-X, X]$ 上连续, 故存在正常数 $M > 0$, 使得

$$|f(x)| \le M, \quad \forall x \in [-X, X].$$

证明.

(1) 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, 其中 A 为常数. 由函数极限定义, 取 $\epsilon = 1$, 存在正常数 $X > 0$, 当 $x > |X|$ 时

$$|f(x) - A| < 1,$$

故

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \le |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|, \quad \forall |x| > X.$$

(2) 又因为 $f(x)$ 在区间 $[-X,X]$ 上连续, 故存在正常数 $M > 0$, 使得

$$|f(x)| \le M, \quad \forall x \in [-X,X].$$

(3) 取 $C = \max\{|A| + 1, M\}$, 综合 (1) 和 (2)

$$|f(x)| \le C, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

□

作业

- 教材习题 1-10: 1; 2.