高等数学I

5学分、信息、统计外招

第一章 函数与极限

数学系王伟文

课程网页：https://wangyuanhao.github.io/advanced_mathematics/

课程要求

按时出勤、提交作业，有事请假。根据教学规定**缺勤或缺作业**超过1/3不能参加期末考试；

上课请带上笔和草稿纸

微信上搜索雨课堂小程序，认证登陆后找到课程：2024-微积分I

作业要求

- 每次提交作业不能超过3张A4纸，每一张标注学号和姓名；
- 每两周提交一次作业。每次课后，作业及提交时间在课程网页公布;
- 不符合提交要求将拒收；
- 除了解答正确与否，作业完成度也很重要的评价标准。

完成度>准确性

教材

《高等数学》(第七版)上册，同济大学应用数学系主编，高等教育出版社

参考书目

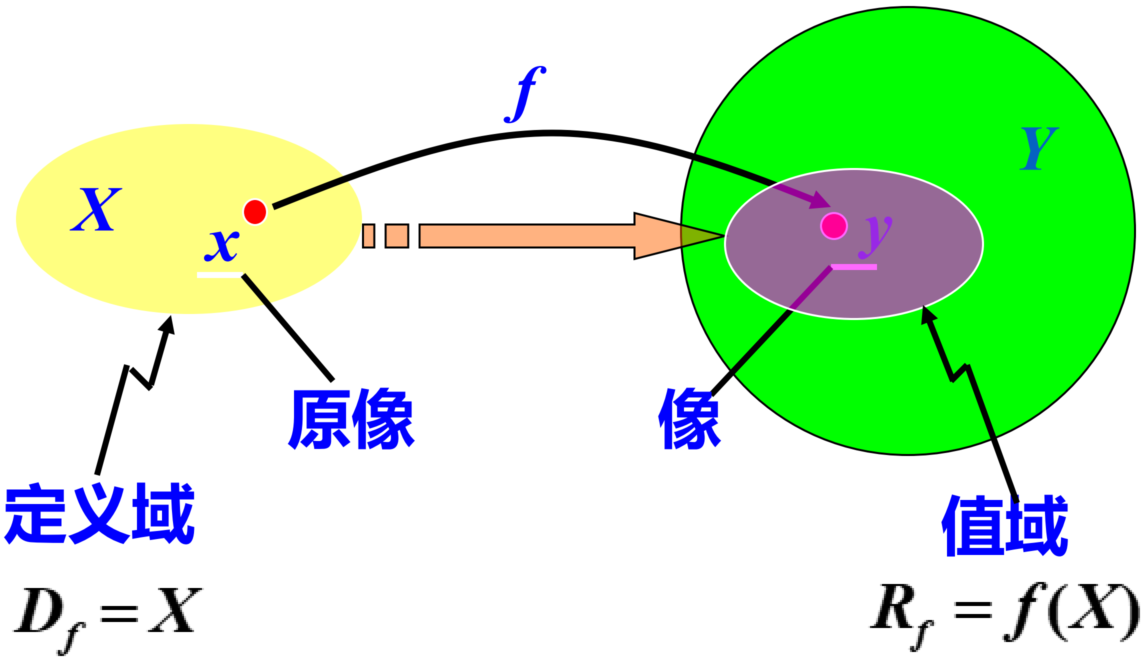
- 《微积分》上、下册，同济大学应用数学系编，高等教育出版社
- 《数学分析》上、下册，复旦大学陈传璋等编，高等教育出版社
- 《高等数学释疑解难》工科数学课程教学指导委员会编，高等教育出版社
- 《高等数学例题与习题》 同济大学高等数学教研室编，同济大学出版社

第一节 映射与函数

映射 设X, Y是两个非空集合，如果存在一个法则f，使得对X中每个元素x，按法则f，在Y中有唯一确定的元素y与之对应，则称f为X到Y的映射，记作

$$f: X \to Y,$$

其中y称为元素x的像，记作$f(x)$，即$y = f(x)$；而元素x称为元素y的一个原像



第一节 映射与函数

映射 设X, Y是两个非空集合，如果存在一个法则f，使得对X中每个元素x，按法则f，在Y中有唯一确定的元素y与之对应，则称f为X到Y上到映射，记作

$$f: X \to Y,$$

其中y称为元素x的像，记作$f(x)$，即$y = f(x)$;而元素x称为元素y的一个原像

- 映射三要素：定义域、值域的范围、对应法则
- 映射的像是唯一的，但原像不一定唯一
- 请阅读课本例1、例2、例3

第一节 映射与函数

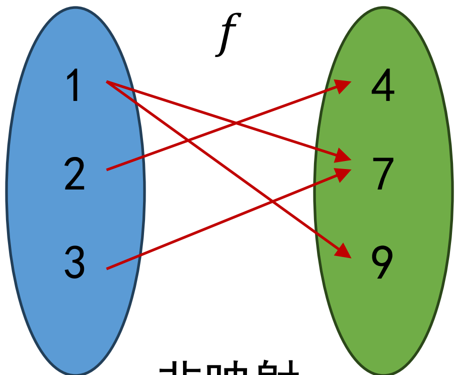
满射、单射和双射 设f为X到Y的映射,

- 若$R_f = Y$, 即Y中任意一元素y都是X中某一元素的像, 则称f为X到Y上映射或满射;
- 若X中任意两个不同元素$x_1 \neq x_2$, 有$f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称f为X到Y的单射;
- 若f既然是单射, 又是满射, 则称f为一一映射.

随堂练习

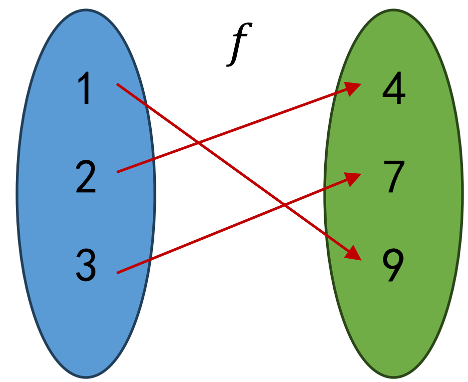
请判断一下对应关系是否是映射，若是，能否判断其映射类型

(1)



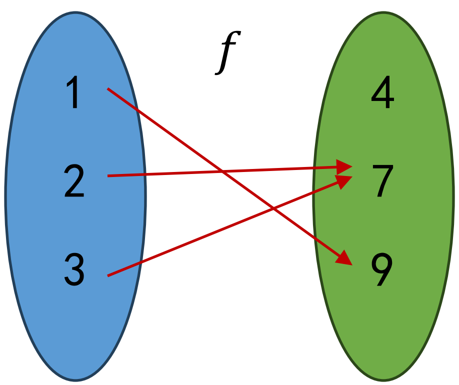
非映射

(2)



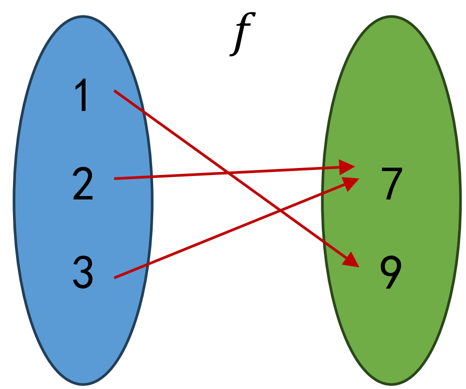
单射&满射，一一映射

(3)



映射

(4)

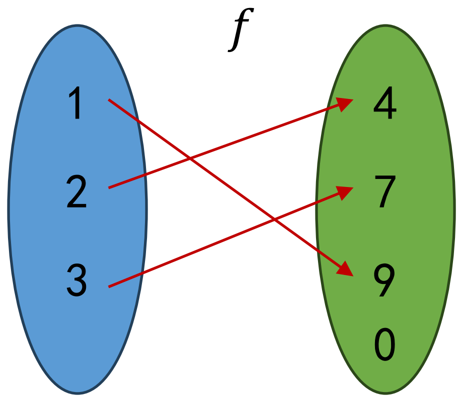


满射

随堂练习

请判断一下对应关系是否是映射，若是，能否判断其映射类型

(5)



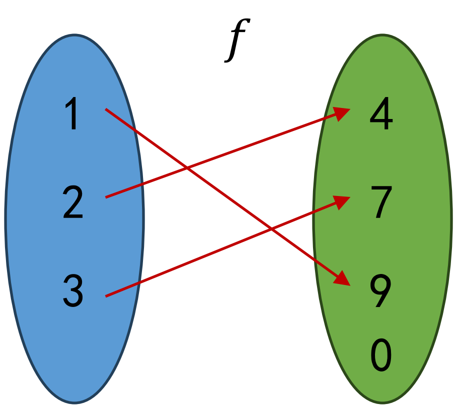
单射

第一节 映射与函数

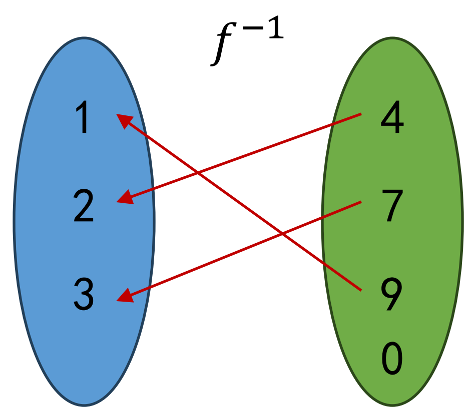
逆映射 设f为X到Y的单射，对任意$y \in R_f$，有唯一的$x \in X$，使得$y = f(x)$，因此可以定义一个从R_f到X的新映射g，此时

$$x = g(y).$$

对任意$y \in R_f$，若$x = g(y)$，则一定有$y = f(x)$成立. 此映射g称为f的逆映射，记作f^{-1}



单射



逆映射

第一节 映射与函数

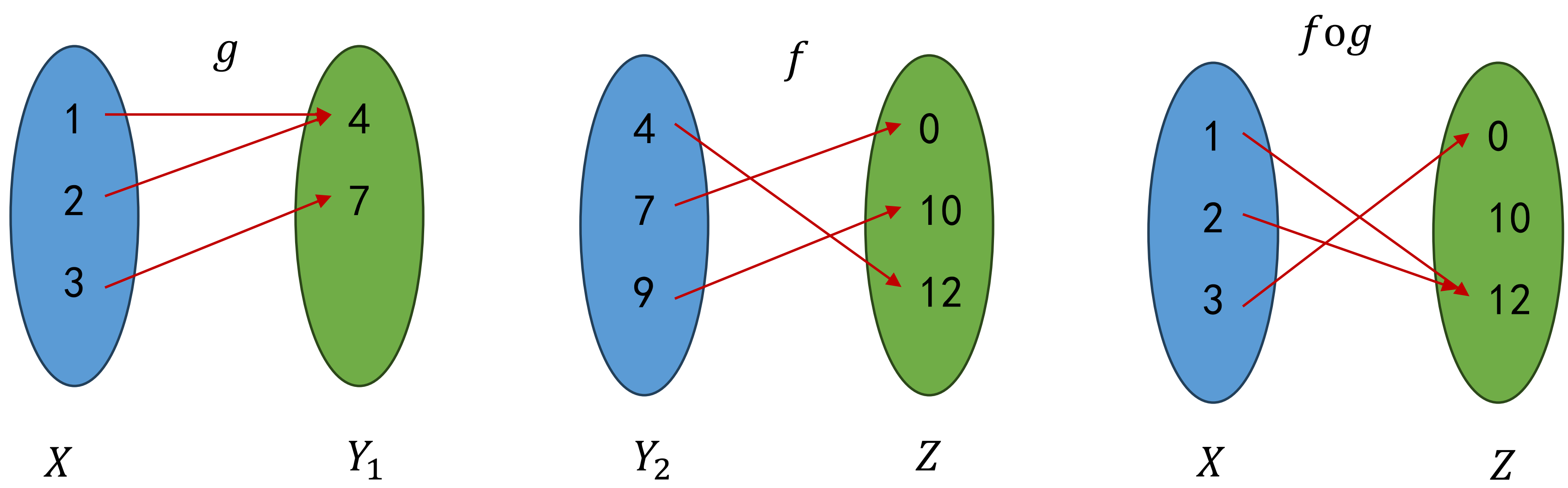
复合映射 设有两个映射g、f,

$$g: X \to Y_1 \quad f: Y_2 \to Z$$

且$Y_1 \subseteq Y_2$, 则由映射g和f可以定义一个从X到Z的对应法则, 此对应法则确定了一个从X到Z的, 记为

$$f\circ g: X \to Z \ \ f\circ g(x) = f[g(x)]$$

称为g与f的复合映射.



第一节 映射与函数

复合映射 设有两个映射g、f,

$$g: X \to Y_1 \quad f: Y_2 \to Z$$

且$Y_1 \subseteq Y_2$, 则由映射g和f可以定义一个从X到Z的对应法则, 此对应法则确定了一个从X到Z的, 记为

$$f\text{o}g: X \to Z \quad f\text{o}g(x) = f[g(x)]$$

称为g与f的复合映射.

- **映射g与f构成复合映射的条件是: g的值域R_g必须包含在f的定义域中, 即$R_g \subseteq D_f$.**

第一节 映射与函数

函数 设数集$D \subseteq \mathbb{R}$, 则称映射$f: D \to \mathbb{R}$为定义在D上的函数, 简记为

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中x称为自变量, y称为因变量, D称为值域, 记作$D_f := D$.

- 对任意$x \in D$, 存在唯一$y \in \mathbb{R}$与之对应
- 这个值称为函数f在x处的**函数值**, 记作$f(x)$, 即$y = f(x)$
- 因变量 y与自变量x的依赖关系称为**函数关系**
- 函数值$f(x)$的全体构成的集合称为函数f的**值域**, 记作R_f或$f(D)$, 即
$$R_f = f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\}$$
- 两个函数相同, 若两者定义域与对应法则相同

第一节 映射与函数

例子 自由落体运动中, 设物体的下落时间为t, 下落距离为s, 记开始下落时刻$t=0$, 落地时刻为T, 则t与s的函数关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\ t\in[0,T]$$

此函数定义域为区间$[0,T]$

第一节 映射与函数

自然定义域 使得算式有意义的所有实数组成的集合

一些常见函数的自然定义域

- $y=\sqrt{x}, x\geq 0$
- $y=\log x\,, x>0$
- $y=\frac{1}{x}, x\neq 0$

随堂练习

- 请确定以下函数的(自然)定义域

$(1)\ y=\sqrt{x-1}$

$(2)\ y=\sqrt{(x+1)^2}$

$(3)\ y=\sqrt{x^2-1}$

(1) $\boldsymbol{x\geq 1}$

(2) $\boldsymbol{x}$**为任意实数**

(3) $\boldsymbol{x\geq 1}$或$\boldsymbol{x\leq -1}$

$(4)\ y=\log_2(x-1)$

$(5)\ y=\log_2(x^2+1)$

$(6)\ y=\log_2(x^2-1)$

(4) $\boldsymbol{x>1}$

(5) $\boldsymbol{x}$**为任意实数**

(6) $\boldsymbol{x>1}$或$\boldsymbol{x<-1}$

$(7)\ y=\frac{1}{x-1}$

$(8)\ y=\frac{1}{x^2-1}$

$(9)\ y=\frac{1}{x^2+1}$

(7) $\boldsymbol{x\neq 1}$

(8) $\boldsymbol{x\neq 1}$且$\boldsymbol{x\neq -1}$

(9) $\boldsymbol{x}$**为任意实数**

随堂练习

判断函数$y = x$与$y = \sqrt{x^2}$是否是相同的函数关系

不是，因为对应法则不同，前者$y = f(x) = x,$ 后者$y = |x|$

第一节 映射与函数

分段函数:用多个式子表示一个函数

绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0. \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

符号函数

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0. \\ 0 & x = 0. \\ \ \ 1, & x > 0 \end{cases}$$

第一节 映射与函数

函数有界性 设函数$f(x)$的定义域为D, 数集$X \subseteq D$.

- 若存在数K_1使得

$$f(x) \le K_1,$$

对任意$x \in K_1$成立, 则称函数$f(x)$**在X上有上界**, 称K_1为函数$f(x)$在X上对一个上界;

- 若存在数K_2使得

$$f(x) \ge K_2,$$

对任意$x \in K_2$成立, 则称函数$f(x)$**在X上有下界**, 称K_1为函数$f(x)$在X上对一个下界

第一节 映射与函数

函数有界性 设函数$f(x)$的定义域为D, 数集$X \subseteq D$.

- 若存在正数M使得

$$|f(x)| \leq M,$$

对任意$x \in X$成立, 则称函数$f(x)$**在X上有界**. 若这样的M不存在, 则称$f(x)$在$f(x)$上无界.

- **函数$f(x) = \sin x$满足$|f(x)| \leq 1$, 对任意$x \in (-\infty, +\infty)$, 此函数在$(-\infty, +\infty)$上有界;**

- **函数$f(x) = \frac{1}{x}$在区间$(0, 1)$上有下界, 无上界, 但该函数在此区间内无界;**

- **函数$f(x) = \frac{1}{x}$在区间$(1, 2)$上既有下界, 也有上界, 此函数在该区间内有界**

第一节 映射与函数

函数的单调性 设函数$f(x)$的定义域为D, 区间$I \subseteq D$, 若对于区间I上两点x_1, x_2

- 若$x_1 < x_2$, 总有$f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数$f(x)$在区间I上单调增加;
- 若$x_1 < x_2$, 总有$f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数$f(x)$在区间I上单调减少.

单调增加和单调减少的函数统称单调函数.

- **函数$f(x) = x^2$在区间$[0, +\infty)$上单调增加, 在区间$(-\infty, 0]$上单调减少;**
- **在区间$(-\infty, +\infty)$内函数$f(x) = x^2$不是单调的;**
- **函数$f(x) = x^3$在区间$(-\infty, +\infty)$内单调增加.**

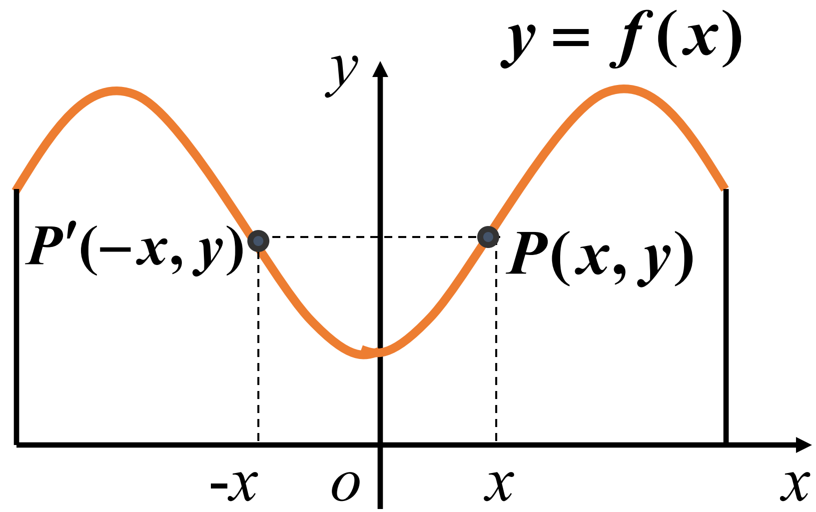
第一节 映射与函数

偶函数 **设D关于原点对称**，对于任意$x \in D$，有

$$f(-x) = f(x),$$

则称$f(x)$为偶函数

- 偶函数的图形关于y轴对称



偶函数

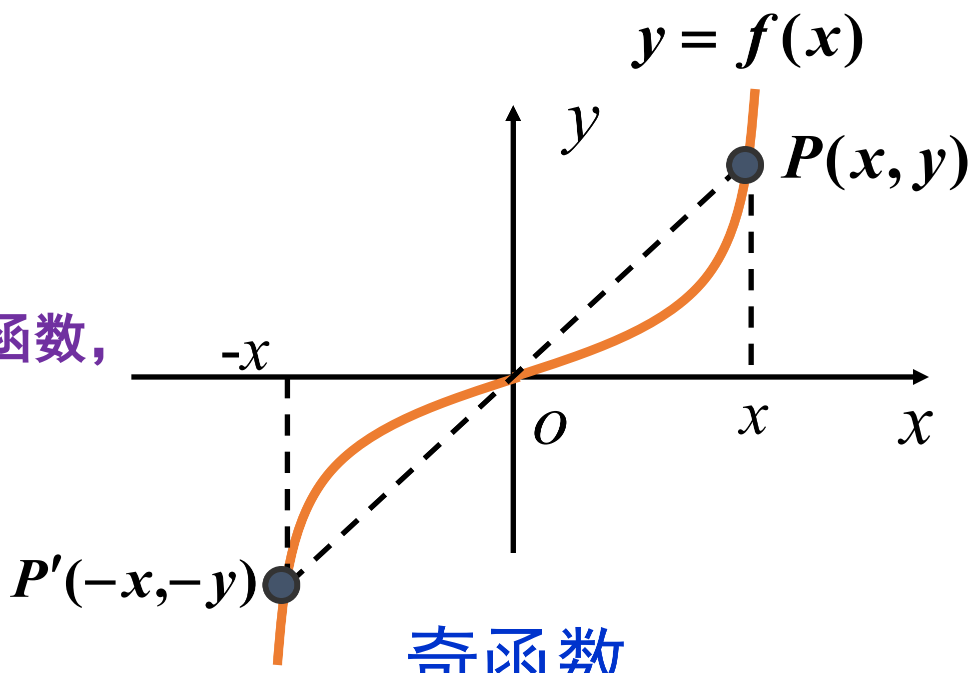
第一节 映射与函数

奇函数 **设D关于原点对称**，对于任意$x \in D$，有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称$f(x)$为奇函数

- **奇函数的图形关于原点对称**
- **若奇函数在$x = 0$处有定义，则 $f(0) = 0$，即奇函数过原点**
- **既不是偶函数也不是奇函数的函数，可简称非奇非偶函数**



奇函数

随堂练习

- 请判断以下函数的奇、偶性

$(1)\ y = x^2$

$(2)\ y = \sqrt{(x+1)^2}$

$(3)\ y = x^2 + 2x$

(1)偶函数

(2）非奇非偶函数

(3）非奇非偶函数

$(4)\ y = |x|$

$(5)\ y = x^3$

$(6)\ y = -x^3 - x$

(4）偶函数

(5)奇函数

(6) 奇函数

$(7)\ y = \frac{1}{x}$

$(8)\ y = \frac{x^2+1}{x}$

$(9)\ y = \frac{1}{x^2+1}$

(7) 奇函数

(8）奇函数

(9）偶函数

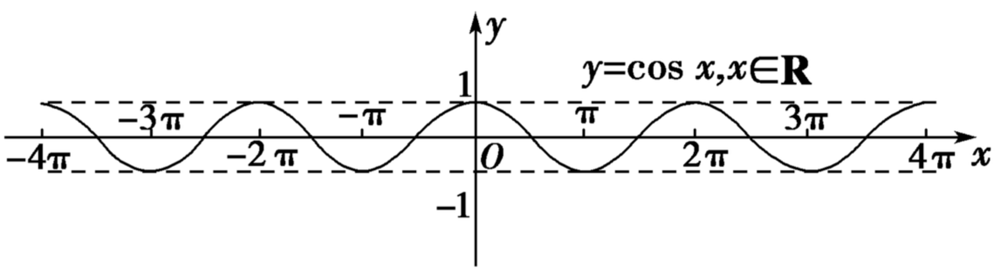
第一节 映射与函数

周期函数 设D为函数$f(x)$的定义域，若存在正常数T，对于任意$x \in D$，有$(x \pm T) \in D$, 且

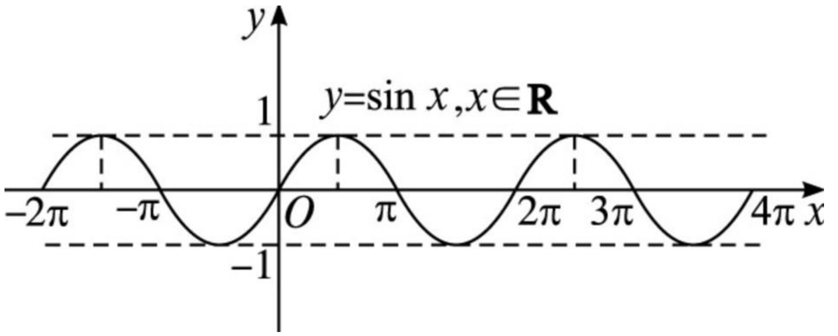
$$f(x+T) = f(x)\text{恒成立}$$

则称$f(x)$为周期函数，T称为函数的周期，满足上式的最小的T值称为最小正周期

$\cos(x_0 + 2\pi) = \cos x_0$



$\sin(x_0 + 2\pi) = \sin x_0$



周期函数 设D为函数$f(x)$的定义域，若存在正常数T，对于任意$x \in D$，有$(x \pm T) \in D$, 且

$$f(x+T)=f(x)\text{恒成立}$$

则称$f(x)$为周期函数，T称为函数的周期，满足上式的最小的T值称为最小正周期

狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y=D(x)=\begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}. \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

以任意正有理数为周期, 故不存在最小正周期.

第一节 映射与函数

反函数 设函数$f: D \to f(D)$是单射, 则它存在逆映射$f^{-1}: f(D) \to D$, 此逆映射称为函数f的反函数.

- 对任意$y \in f(D)$, 有唯一$x \in D$使得$y = f(x)$, 故有$f^{-1}(y) = x$
- 函数$y = f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$是单射, 故有反函数, 其反函数为$x = y^{\frac{1}{3}},\ \ y \in \mathbb{R}$
- 习惯上自变量用x表示, 因变量用y表示, 故$y = f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$的反函数表示为$y = x^{\frac{1}{3}},\ \ x \in \mathbb{R}$

随堂练习

- 请求出下列函数的反函数, 注意要写明定义域, 若反函数不存在请指明理由

(1) $y = f(x) = x$

(1) $x = f^{-1}(y) = y, y \in \mathbb{R}$

(2) $y = f(x) = \frac{1}{x}$

(2) $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{y}, y \neq 0$

(3) $y = f(x) = 2x + 1$

(3) $x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}, y \in \mathbb{R}$

(4) $y = f(x) = |x|$

(4) 反函数不存在，当$y = 1$时，$x = 1$或$x = -1$，也就是说，不存在唯一的x与y对应

(5) $y = f(x) = 1 - x^2, x \geq 0$

(5) $x = f^{-1}(y) = \sqrt{1-y}, y \leq 1$

第一节 映射与函数

复合函数 设函数$y = f(u)$的定义域为D_f, 函数$u = g(x)$的定义域为D_g, 且其值域为$R_g \subseteq D_f$, 则由下式确定的函数

$$y = f[g(x)], \quad x \in D_g$$

称为由函数$u = g(x)$与函数$y = f(u)$构成的**复合函数**, 记为$f \circ g$, 即$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$, 它的定义域为D_g, 变量u为中间变量.

- **习惯上为方便起见, 仍称$y = \ln(x+1)$为函数$u = x + 1$和函数$y = \ln u$的复合函数, 它的定义域不是$u = x + 1$的自然定义域, 而是其一个子集$(-1, +\infty)$**

第一节 映射与函数

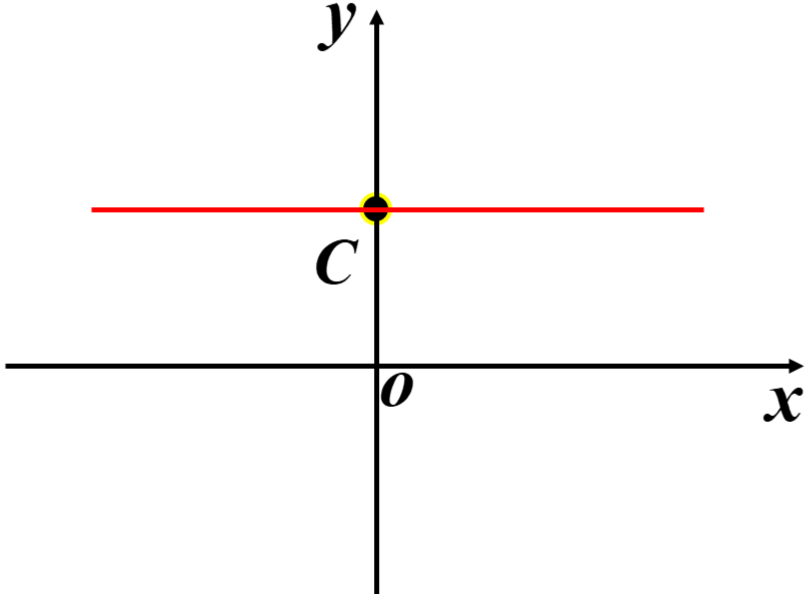
函数运算 设函数$f(x)$，$g(x)$的定义域依次为D_f, D_g, $D = D_f \cap D_g \neq \emptyset$, 则我们可以定义这两个函数的下列运算

- **和(差)$f \pm g$:** $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D$
- **积$f \cdot g$:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$
- **商$\frac{f}{g}$:** $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D/\{x|g(x) = 0, x \in D\}$

第一节 映射与函数

基本初等函数

常数函数 $y = C$（C是常数），其定义域为$(-\infty, +\infty)$



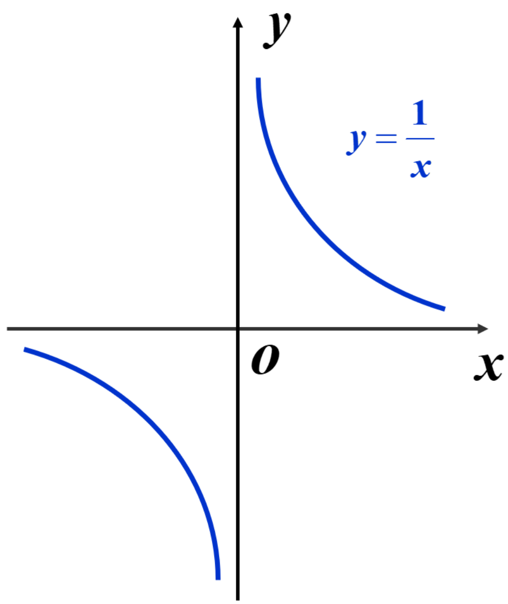
第一节 映射与函数

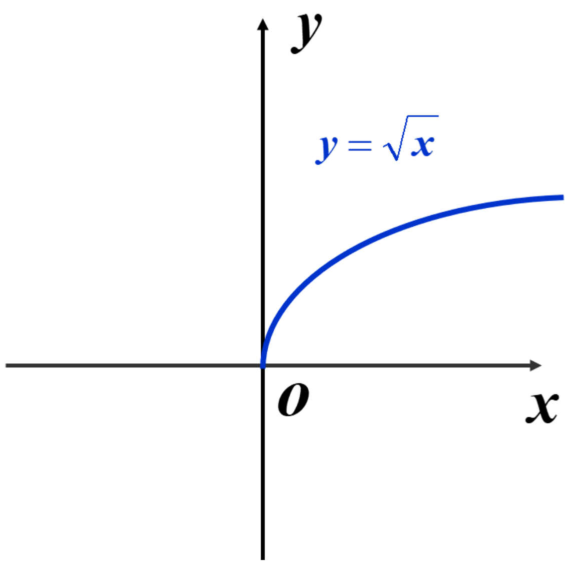
基本初等函数

幂函数 $y = x^a$（a为实数），其定义域由a的取值确定。

$a = -1$，$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$，定义域为$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$a = \frac{1}{2}$，$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$，定义域为$[0, +\infty)$



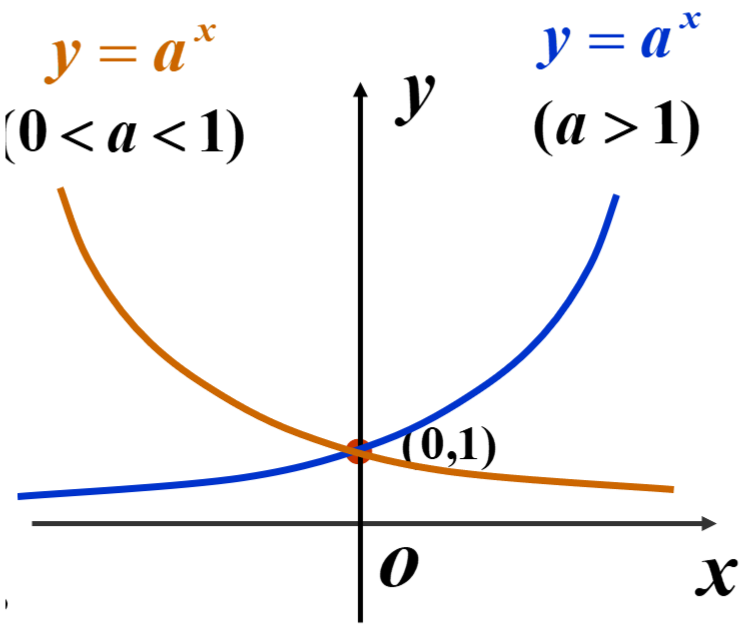


第一节 映射与函数

基本初等函数

指数函数 $y = a^x\,(a > 0$且$a \neq 1)$，其定义域为$(-\infty, +\infty)$

- 无论a取何值，都通过点$(0, 1)$，且y总大于0
- 当$a > 1$时，函数单调递增
- 当$0 < a < 1$时，函数单调递减

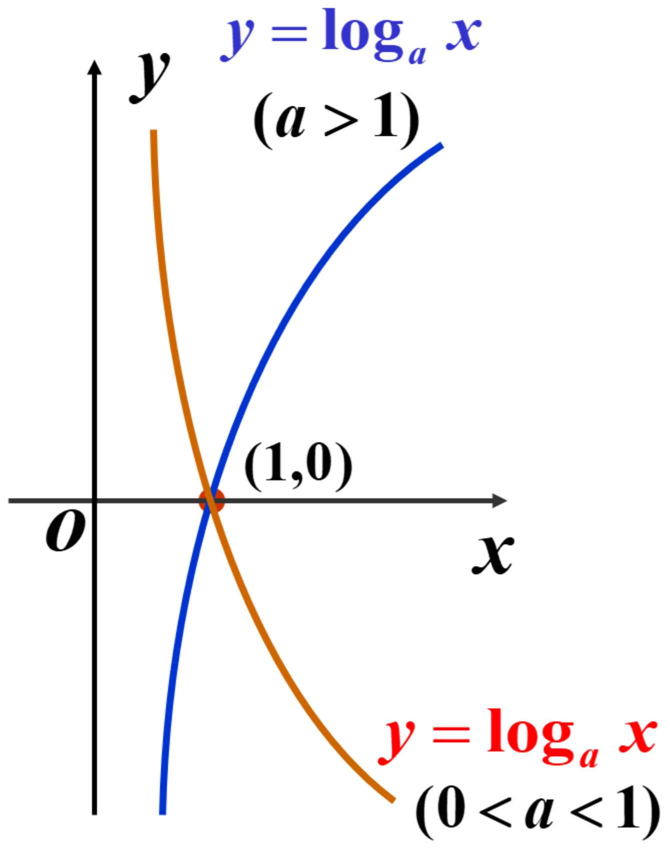


第一节 映射与函数

基本初等函数

对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$且$a\neq 1$），其定义域为$(0,+\infty)$

- 无论a取何值，都通过点$(1,0)$
- 当$a>1$时，函数单调递增
- 当$0<a<1$时，函数单调递减
- 与指数函数互为反函数$x=a^y$



第一节 映射与函数

基本初等函数

三角函数

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$$

- $y = \cos x$是偶函数
- $y = \sin x, y = \tan x$是奇函数
- $y = \sin x, y = \cos x$是以2π为周期的函数，$y = \tan x$是以π为周期的函数
- $|\sin x| \leq 1$，$|\cos x| \leq 1$均为有界函数

第八节 初等函数

基本初等函数

反三角函数

$$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$$

- $y = \arcsin x\ , x \in [-1, 1], y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $y = \arccos x\ , x \in [-1, 1], y \in [0, \pi\ ]$
- $y = \arctan x\ , x \in (-\infty, +\infty), y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

分别对应$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$的反函数

第一节 映射与函数

初等函数 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

- $y=\sqrt{1-x^2}$
- $y=\sin^3(x)$
- $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$

作业

习题1-1

- 1(1)(3)(4)(9);2(1);4(2);7(1)(3)(5);8(4)(5)
- 9(1)(2)(5);11(1)(4);12(3)