高等数学 I　习题解析

王伟文　暨南大学

习题 1-2: 3(4), **教材第** 26 **页**

解　此说法正确. 使用反证法, 证明若

$$\forall m \in \mathbb{N}_+, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{当} n > N \text{时}, |x_n - a| < \frac{1}{m} \text{成立}. \quad \text{(断言 1)}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a$, 使用 “$\epsilon - N$” 语言的否命题, 该数学表达式可陈述为

$$\exists \epsilon_0 > 0, \text{不存在这样的} N \in \mathbb{N}_+ : \text{当} n > N \text{时}, |x_n - a| < \epsilon_0 \text{成立} \quad \text{(断言 2)}$$

由(断言 1), 取 $m = \left[\frac{1}{\epsilon_0}\right] > \frac{1}{\epsilon} > 0$, 其中 $[\cdot]$ 表示向上取整运算, 存在 $\bar{N} \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > \bar{N}$ 时

$$|x_n - a| < \frac{1}{m} = \frac{1}{[1/\epsilon_0]} < \frac{1}{1/\epsilon_0} = \epsilon_0$$

即对于 $\epsilon_0 > 0$, 存在 $\bar{N} \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > \bar{N}$ 时

$$|x_n - a| < \epsilon_0.$$

与(断言 2)矛盾.

综上所述, (断言 1)与(断言 2)不能同时为真, 故(断言 1)成立时, 必有(断言 2)不成立, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 证毕.