高等数学 I-练习 1

1 选择题

1. 下列结论正确的是 [C]

(A) $S=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 和 $y=\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ 都与 $y=1$ 是相同的函数

(B) $y=\sqrt{x^4}$ 和 $y=x\sqrt{x^2}$ 都与 $y=x^2$ 是相同的函数

(C) $y=|x|$ 和 $y=x\text{sgn}x$ 都与 $y=\begin{cases} x,\ x\geq 0 \\ -x,\ x<0 \end{cases}$ 是相同的函数

(D) $y=\arcsin(\sin x)$ 和 $y=\sin(\arcsin x)$ 都与 $y=x$ 是相同的函数

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)$, 则下列函数中定义域仍是 $(-1,0)$ 的函数是 [B]

(A) $f(x^2-1)$

(B) $[f(x)]^2$

(C) $f(2x)$

(D) $f(x-1)$

3. 下列函数中不是周期函数的是 [C]

(A) $f(x)=\sin(x+1)$

(B) $f(x)=|\sin x|$

(C) $f(x)=x\cos x$

(D) $f(x)=1+\sin x$

4. 下列函数 $y=f(u), u=\phi(x)$ 中能够构成复合函数 $y=f[\phi(x)]$ 的是 [D]

(A) $y=f(u)=\frac{1}{\sqrt{u-1}}, u=\phi(x)=-x^2+1$

(B) $y=f(u)=\log(1-u), u=\phi(x)=x^2+1$

(C) $y=f(u)=\frac{1}{u-1}, u=\phi(x)=1$

(D) $y=f(u)=\sqrt{u-1}, u=\phi(x)=\sin x$

5. 函数 $f(x)=-\sqrt{1-x^2}(0\leq x\leq 1)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$[C]

(A) $\sqrt{1-x^2}$

(B) $-\sqrt{1-x^2}$

(C) $\sqrt{1-x^2}(-1\leq x\leq 0)$

(D) $-\sqrt{1-x^2}(-1\leq x\leq 0)$

2 解答题

1. 求函数 $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$ 的定义域

$$1-(x-1)^2\geq 0\Longrightarrow (x-1)^2-1\leq 0\Longrightarrow (x-1-1)(x-1+1)\leq 0\Longrightarrow 0\leq x\leq 2.$$

2. 设函数 $f(x)=e^{|x|}$. (a) 判断函数的奇偶性;(b) 研究函数的单调性, 并找到其单调区间.

a.

$$f(-x)=e^{|-x|}=e^{|x|}=f(x)$$

b.

$$f(x)=e^{|x|}=\begin{cases} e^{x}, & x\geq 0 \\ e^{-x}, & x<0 \end{cases}$$

由指数函数性质知, $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

高等数学 I-练习 2

1 计算题: 请利用极限的四则运算及多项式极限的性质求解以下极限

(1) $\lim\limits_{x\to0^-}(x-1)=-1$ (2) $\lim\limits_{x\to1}(x^2-2x+1)=0$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{100}}{(x+2)^{99}}=\infty$ (4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{x\to2}(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4})=\frac{1}{4}$

2 计算题: 请利用无穷大量与无穷小量的关系及无穷小量的性质求解以下极限

(1) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^3-8}\right)=\infty$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2}{x}\cdot\sin\left(e^{\frac{2}{x}}\right)\right]=0$

(3) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x+3}{x-3}=\infty$

3 计算题: 请利用两个重要极限及其一般化形式求解以下极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

(3) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (4) $\lim\limits_{x\to1}(1+2\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^2$

(5) $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x-3}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$

4 计算题: 请等价无穷小替换求解以下极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{(1+x)^n}-1}{x}=\frac{n}{m}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\arctan x}=2$

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}, x<0\\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x}, x>0\end{cases}$, 求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

$$f_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}-1}=2$$

$$f_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+2x)}{x}=2$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f_-(0)=f_+(0)=2.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\arcsin 2x)^2}{1-\cos x}=8$

5 计算题: 讨论下列函数在点 x_0 处的连续性, 若其为间断点请指出间断点类型

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}\quad x_0=0.$

$$f_-(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$f_+(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$$

左右极限存在但不相等, $f(x)$ 在 $x=0$ 处为跳跃间断点.

(2) $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), & -1<x\le 0,\\ e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0.\end{cases}\quad x_0=1.$

$$f_-(1)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\ln(x+1)=\ln 2$$

$$f_+(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$$

左右极限至少有一个是无穷大, 故 $x=1$ 为无穷间断点.

(3) $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0,\\ 1+x, & x>0.\end{cases}\quad x_0=0.$

$$f_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = 1$$

$$f_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 + x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f_-(0) = f_+(0) = 1 = f(0) = 1$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.