暨 南 大 学 考 试 试 卷

<table>
<tr><td rowspan="4">教
师
填
写</td><td>2023–2024 学年度第 1 学期</td><td>课程类别
必修 [✓] 选修 [ ]</td></tr>
<tr><td>课程名称：微积分 I</td><td>考试方式
开卷 [ ] 闭卷 [✓]</td></tr>
<tr><td>授课教师：</td><td rowspan="2">试卷类别（A, B, C）
[A] 共 6 页</td></tr>
<tr><td>考试时间：</td></tr>
<tr><td>考
生
填
写</td><td colspan="2">______学院______专业______班(级)
姓名______学号______ 内招 [ ] 外招 [✓]</td></tr>
</table>

题　号	一	二	三	四	五	总分
得　分						
评阅人						

线　订　装

一、单选题（共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

答题须知：本题答案必须写在如下表格中，否则不给分.

小题	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								

1. 下列函数中，属于非奇非偶函数的是…………………………(C)

(A) $f(x)=x+\sin x$;　(B) $f(x)=x\sin x$;

(C) $f(x)=|x+\cos x|$;　(D) $f(x)=\cos(x^3)$.

2. 下列函数对 $\{y=f(u), u=\phi(x)\}$ 中能够构成复合函数 $y=f[\phi(x)]$ 的是…(D)

(A) $y=f(u)=\sqrt{1-u}$, $u=\phi(x)=e^x+1$

(B) $y=f(u)=\frac{1}{\ln u}$, $u=\phi(x)=-x^2$;

(C) $y=f(u)=\arcsin|u|$, $u=\phi(x)=e^x+1$;

(D) $y=f(u)=\ln(1-u)$, $u=\phi(x)=\sin x$.

3. 下列变量在给定的变化过程中为无穷大量的是…………………………(B)

(A) $\frac{(x+1)^{2023}}{(x+2)^{2024}}\ (x\to\infty)$; (B) $\sin\frac{1}{x}\ (x\to 0)$;

(C) $x\ln(1+\frac{1}{x})\ (x\to\infty)$; (D) $\frac{\cos x}{x^2}\ (x\to 0)$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, x\geq 0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, x<0 \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$ ……………………………(D)

(A) 1; (B) 0; (C) ∞; (D) 不存在.

5. 若数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n > M$, M 为给定的常数，则下列说法正确的是………(B)

(A) 对于任意正整数 n 总有 $y_n > M$;

(B) 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时有 $y_n>M$;

(C) 对于任意正整数 n, 不能确定 y_n 与 M 的大小关系;

(D) 存在正整数 N, 当 $n<N$ 时有 $y_n<M$.

6. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\sin[(x+1)^2-2\ln(x+1)-e^x]$ 的极限是……………………(B)

(A) 1; (B) 0; (C) 不存在; (D) $\frac{\pi}{2}$.

7. 函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x<1 \\ x-1, & x\geq 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处……………………………………(D)

(A) 连续; (B) 有可去间断点; (C) 有无穷间断点; (D) 有跳跃间断点.

8. 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[4]{1+2x}-1$ 与 x 相比是…………………………………………(A)

(A) 同阶无穷小但不是等价无穷小; (B) 等价无穷小;

(C) 高阶无穷小; (D) 低阶无穷小.

9. 可导函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足 $f(a)=f(b)$, 若存在一点 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=f(a)=f(b)$, 则区间 (a,b) 上的驻点数量至少有……………………………………(B)

(A) 一个; (B) 两个; (C) 三个; (D) 无法确定.

10. 设 $y=x\ln x$，则 $y^{(2)}=$ ……………………………………………………(A)

(A) $\frac{1}{x}$; (B) $-\frac{1}{x^2}$; (C) $-\frac{1}{x}$; (D) $\frac{1}{x^2}$.

二、填空题（共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

答题须知：本题答案必须写在如下表格中，否则不给分.

小题	1	2	3	4
答案				
小题	5	6	7	8
答案				

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=$ __4__.

装 订 线

线　订　装

2. 曲线 $y=\frac{2023x^2+1}{2024x^3+1}$ 的水平渐近线为 $y=$__0__.

3. 曲线 $y=x^2+1$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程为 $y=$__$2x$__

4. 函数 $f(x)=\sqrt{\ln x-1}$ 的定义域使用**区间**表示为__$[e,\infty)$__.

5. 函数 $f(x)=|x|^3+x^2+2024$, 则 $f'(0)=$__0__

6. 函数 $y=x\cos x$ 的微分 $\mathrm{d}y=$__$(\cos x-x\sin x)\mathrm{d}x$__.

7. 生产 x 单位商品的成本函数为 $C(x)=20x+\frac{100}{x}$, 当 $x=10$ 时，x 增加一个单位，成本相应近似增加__19__个单位.

8. 满足不等式 $\sqrt{(x-1)^2}\le 2023$ 的所有 x 属于**区间**__$[-2022,2024]$__.

三、**判断题,对与错分别使用"✓"和"×"标记**（共 4 小题，每小题 2 分，共 8 分）

答题须知：本题答案必须写在如下表格中，否则不给分.

小题	1	2	3	4
答案				

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续，则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必不可导.·····(✓)

2. 设函数 $y=f(x)$ 二阶导数 $f''(x)$ 存在且连续，则在曲线 $y=f(x)$ 的拐点处相应的二阶导数必定为 0.··········(✓)

3. 设可微函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处微分为零, 则 x_0 必为极值点.··········(×)

4. 无穷大量与无穷小量的乘积依然是无穷小量.··········(×)

四、**计算题**（共 6 题, 每题 8 分, 共 48 分, 要求写出计算过程.）

1. 求函数 $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}+\frac{\ln x}{x}+e^{2x}-(\cos x)^2$ 的导数.

解.

$$\begin{aligned}
y'&=\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}\right)'+\left(\frac{\ln x}{x}\right)'+(e^{2x})'-\left[(\cos x)^2\right]'\\
&=\left[\left(\frac{x}{2}\right)'\sqrt{x^2-4}+\frac{x}{2}(\sqrt{x^2-4})'\right]+\frac{x(\ln x)'-(x)'\ln x}{x^2}\\
&\quad+e^{2x}(2x)'-2\cos x(\cos x)'\\
&=\left[\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}+\frac{x(x^2-4)'}{4\sqrt{x^2-4}}\right]+\frac{x\frac{1}{x}-\ln x}{x^2}+2e^{2x}+2\cos x\sin x\\
&=\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}}+\frac{1-\ln x}{x^2}+2e^{2x}+2\sin 2x\\
&=\frac{x^2-2}{\sqrt{x^2-4}}+\frac{1-\ln x}{x^2}+2e^{2x}+2\sin 2x
\end{aligned}$$

······8 分

(注：每项正确得 2 分)

2. 计算下列极限 (每小题 4 分):

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}$;　　　　(2) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\frac{\ln\cos x}{(2\pi-x)^2}$.

解. (1)

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

……2 分

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}\right]^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

……4 分

(2)

$$原式=\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin x}{2(2\pi-x)\cos x}=\lim_{x\to 2\pi}\frac{1}{2\cos x}\cdot\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin x}{2\pi-x}$$

……2 分

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 2\pi}\frac{\cos x}{-1}=\frac{1}{2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}$$

……4 分

3. 求下列幂指函数及参数方程所确定的函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$(每小题 4 分):

(1) $y=x^{\sqrt{x}}$;　　　　(2) $\begin{cases} x=1-te^t \\ y=\arcsin t \end{cases}$.

解. (1) 对函数两端取自然对数, 得到

$$\ln y=\ln\left(x^{\sqrt{x}}\right)=\sqrt{x}\ln x$$

……1 分

上式两端同时对 x 求导, 得到

$$\frac{1}{y}y'=\left[(\sqrt{x})'\ln x+\sqrt{x}(\ln x)'\right]=\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$$

……3 分

整理得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=y\left(\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}\right)=x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}\right)$$

……4 分

(2) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(1-te^t)'=-[(t)'e^t+t(e^t)']=-e^t(1+t)$,　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$　……2 分

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\Big/\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{1}{e^t(1+t)\sqrt{1-t^2}}$$

……4 分

装　订　线

线　订　装

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\sqrt[2023]{1+2023x}-1}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{(e^x-1)\sin x}{x}, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处点可导性、连续性.

解. 分别考虑函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处点左导数、右导数. 左导数

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{\sqrt[2023]{1+2023x}-1}.$$

……1 分

又因为 $(1+2023x)^{\frac{1}{2023}}-1\sim\frac{1}{2023}\cdot2023x(x\to0)$,

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{\sqrt[2023]{1+2023x}-1}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x}=1.$$

……3 分

右导数

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{(e^x-1)\sin x}{x^2}.$$

……4 分

因为 $e^x-1\sim x(x\to0)$,

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{(e^x-1)\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

……6 分

因为 $f'_-(0)=f'_+(0)=1$, 有 $f'(0)=1$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 由可导性与连续性的关系知, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. ……8 分

5. 设函数 $y=f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x$, 求 (1) 函数 $y=f(x)$ 的所有驻点 (2 分);(2) 函数 $y=f(x)$ 的单调增减区间及极值 (3 分);(3) 曲线 $y=f(x)$ 的拐点 (3 分).

解.

(1) $f'(x)=x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$, 令 $f'(x)=0$, 解得驻点 $x=2,4$. ……2 分

(2) 令 $f'(x)=(x-2)(x-4)>0$, 解得 $x\in(-\infty,2)\bigcup(4,\infty)$, 令 $f'(x)=(x-2)(x-4)<0$, 解得 $x\in(2,4)$. 函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,2)\bigcup(4,\infty)$, 单调递减区间为 $(2,4)$. ……2 分

因为函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增, 在 $(2,4)$ 上单调递减, 故在 $x=2$ 处取得极大值 $f(2)=\frac{20}{3}$, 又因为函数 $f(x)$ 在 $(4,+\infty)$ 上单调递增, 故在 $x=4$ 处取得极小值 $f(4)=\frac{16}{3}$ ……3 分

(3) 函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)=2x-6$, 令 $f''(x)=2x-6=0$, 解得 $x=3$. ……1 分

当 $x>3$ 时 $f''(x)>0$, 此时曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上凹; 当 $x<3$ 时 $f''(x)<0$, 此时曲线 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上下凹, 因此曲线 $y=f(x)$ 的拐点为 $(3,f(3))=(3,6)$. ……3 分

五、应用题（共 1 题，共 8 分）

已知某厂生产 Q 件商品成本为 $C(Q)=25000-200Q+\frac{1}{40}Q^2(Q>0$, 单位: 元), 商品售价为 500 元. 问:(1) 生产多少件商品时, 边际成本为 0 (2 分); (2) 若要使得平均成本最小, 应生产多少件商品 (4 分); (3) 假设所生产的商品均能销售出去, 若要保证利润随着产量增加而增长的趋势, 产量应该控制在什么范围 (2 分).

解.

(1) 边际成本函数 $C'(Q)=-200+\frac{1}{20}Q$, 令 $C'(Q)=-200+\frac{1}{20}Q$, 解得 $Q=4000$, 即生产 4000 件商品时, 边际成本为 0.

……2 分

(2) 平均成本函数为

$$\bar{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{25000}{Q}-200+\frac{Q}{40}(Q>0).$$

取导数得到

$$\bar{C}'(Q)=-\frac{25000}{Q^2}+\frac{1}{40},$$

令 $\bar{C}'(Q)=-\frac{25000}{Q^2}+\frac{1}{40}=0$, 解得 $Q=1000$.

……2 分

又因为 $\bar{C}''(Q)=\frac{50000}{Q^3}$, $C''(1000)=5\times10^{-5}>0$, 故 Q=1000 为唯一极小值点, 且无极大值点, 因此当 $Q=1000$ 时, 平均成本最小.

……4 分

(3) 设利润函数为 $L(Q)$, 则

$$L(Q)=500Q-C(Q)=500Q-(25000-200Q+\frac{1}{40}Q^2)$$
$$=700Q-25000-\frac{1}{40}Q^2(Q>0).$$

取导数得到 $L'(Q)=700-\frac{1}{20}Q$, 令 $L'(Q)=700-\frac{1}{20}Q>0$, 解得 $0<Q<14000$, 产量应该小于 14000 件.

……2 分

装　订　线