# 暨 南 大 学 考 试 试 卷

<table>
<tr><td rowspan="4">教<br>师<br>填<br>写</td><td>______学年度第______学期</td><td>课程类别<br>必修 [✓] 选修 [ ]</td></tr>
<tr><td>课程名称: 微积分 I</td><td>考试方式<br>开卷 [ ] 闭卷 [✓]</td></tr>
<tr><td>授课教师: ______</td><td rowspan="2">试卷类别 (A, B, C)<br>[A] 共 6 页</td></tr>
<tr><td>考试时间: ______</td></tr>
<tr><td>考<br>生<br>填<br>写</td><td colspan="2">______学院______专业______班(级)<br>姓名______学号______</td></tr>
</table>

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | | | |
| 评阅人 | | | | | | |

线

订

装

**一、单选题**（共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

答题须知：本题答案必须写在如下表格中，否则不给分.

| 小题 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | | | | | | | | | | |

**1.** 下列函数中，属于单调递增函数的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( A )

(A) $f(x)=e^x, x\in(-\infty,+\infty)$;　　(B) $f(x)=\ln\frac{1}{x}(x>0)$;

(C) $f(x)=e^{-x}, x\in(-\infty,+\infty)$;　　(D) $f(x)=\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$.

**2.** 下列数列中收敛的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( D )

(A) $y_n: 0,-1,-2,-3,-4,\cdots$;

(B) $y_n: 1,-1,2,-2,3,-3,\ldots$;

(C) $y_n: \sin 1,\sin(-1),\sin 2,\sin(-2),\sin 3,\sin(-3),\cdots$;

(D) $y_n: e, e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{1}{3}}, e^{\frac{1}{4}}, e^{\frac{1}{5}},\cdots$.

**3.** 若 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为无穷小量, 则当 $x\to x_0$ 时, 未必为无穷小量的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( D )

(A) $f(x)+g(x)$;　(B) $f(x)-g(x)$;　(C) $f(x)\cdot g(x)$;　(D) $\frac{f(x)}{g(x)}$.

**4.** 设函数 $f(x)=3x^3-9x$, $f(x)$ 的单调递减区间为…………………………( B )

(A) $(-\infty,-1)$;　(B) $(-1,1)$;

(C) $(1,+\infty)$;　(D) $(-\infty,-1)\bigcup(1,+\infty)$.

**5.** 在区间 $[0,1]$ 上不满足罗尔中值定理条件的函数是…………………………( D )

(A) $f(x)=x^2-x$;　(B) $f(x)=x^3-3x^2+2x$;

(C) $f(x)=x^3-x^2$;　(D) $f(x)=(x-1)^2$.

**6.** 设 $f(x)=2x^2+x$, 由拉格朗日中值定理知, 在区间 $(0,2)$ 上存在一点 $\xi$, $f'(\xi)=$( C )

(A) 0;　(B) 1;　(C) 5;　(D) 不存在.

**7.** 若函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内总有 $f'(x)>0$, $f''(x)<0$, 则在区间 $(a,b)$ 内 $f(x)$( C )

(A) 单调递增, 上凹;　(B) 单调递减, 下凹;　(C) 单调递增, 下凹;　(D) 单调递减, 上凹.

**8.** 设曲线 $y=\frac{x}{x^2-2x}$, 则 $f(x)$ 的渐近线数量是…………………………( C )

(A) 0;　(B) 1;　(C) 2;　(D) 3.

**9.** 若 $(1,4)$ 为 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点, 则…………………………( B )

(A) $a=6, b=-2$;　(B) $a=-2, b=6$;　(C) $a=0, b=4$;　(D) $a=-1, b=5$;

**10.** 设函数 $y=f(\frac{1}{2}x^2)$ 的二阶导数存在, 则 $y''=$…………………………( D )

(A) $f''(\frac{1}{2}x^2)$;　(B) $x\cdot f''(\frac{1}{2}x^2)$;

(C) $f'(\frac{1}{2}x^2)+x\cdot f''(\frac{1}{2}x^2)$;　(D) $f'(\frac{1}{2}x^2)+x^2\cdot f''(\frac{1}{2}x^2)$.

## 二、填空题（共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

答题须知：本题答案必须写在如下表格中，否则不给分.

| 小题 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 答案 | | | | |
| 小题 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 答案 | | | | |

**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=$ $\underline{\quad e^2 \quad}$.

**2.** 函数 $y=3x^2-6x+7$ 的驻点为 $x=$ $\underline{\quad 1 \quad}$.

**3.** 函数 $y=x+1$ 的反函数为 $x=$ $\underline{\quad y-1 \quad}$

**4.** 函数 $y=\ln(1-x^2)$ 的定义域为 $\underline{\quad (-1,1) \quad}$.

**5.** 函数 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2\sin\dfrac{1}{x-1}, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$, 则 $f'(1)=$ $\underline{\quad 0 \quad}$

**6.** 函数 $y=\frac{1}{3}x^3$ 的微分 $dy=$ $\underline{\quad x^2 \quad}$ $dx$.

装　订　线

线

订

装

**7.** 若 $x\to 0$ 时, $\ln(1+2x)$ 与 $kx$ 是等价无穷小量, 则常数 $k=$__2__.

**8.** 函数 $y=x^3-12x+4$ 的极小值点为 $x=$__2__.

**三、判断题, 对与错分别使用"√"和"×"标记**（共 4 小题，每小题 1 分，共 4 分）

答题须知：本题答案必须写在如下表格中，否则不给分.

| 小题 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 答案 | | | | |

**1.** 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, 则 $f(a)=A$. ························ ( × )

**2.** 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导. ·········· ( √ )

**3.** 有函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 若 $f(x)>g(x)$ 总成立, 且存在两个常数 $a,b$ 使得 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, 则 $a\geq b$. ························ ( √ )

**4.** 可导函数中导数取值为 0 的点即是函数的极值点. ························ ( × )

**四、计算题**（共 4 题, 共 44 分）

**1.** 求极限 (每小题 4 分, 共 16 分).

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+7x-8\right)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{2025}+x^{2024}+2023}{10x^{2025}+2022x^{2022}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}$.

**解.** (1)

$$\lim_{x\to 1}\left(2x^2+7x-8\right)=2\cdot 1^2+7\cdot 1-8=1$$

······4 分

(2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2025}+x^{2024}+2023}{10x^{2025}+2022x^{2022}}=\frac{1}{10}$$

······4 分

(3)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

······4 分

(4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x^2)'}{(x)'}$$
$$=\lim_{x\to 0}2x\cdot\cos x^2=0$$

(或 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^2}=0\cdot1=0$) ……4 分

**2.** 求下列函数的导函数 $y'$ 或在给定点处的导数值 (每小题 4 分, 共 16 分).

(1) $y=4x^2+6x+8$; (2) $y=\cos x\cdot\ln x$;

(3) $y=\frac{x^2+1}{x+1}$; (4) 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2,\\ y=e^t-1\end{cases}$ 确定 $y$ 是 $x$ 的函数，求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=1}$.

**解.** (1)

$$y'=(4x^2+6x+8)'=8x+6$$

……4 分

(2)

$$y'=(\cos x)'\cdot\ln x+\cos x\cdot(\ln x)'$$
$$=-\sin x\cdot\ln x+\frac{\cos x}{x}$$

……4 分

(3)

$$y'=\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)'$$
$$=\frac{(x^2+1)'\cdot(x+1)-(x^2+1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

……4 分

(4)

$$\frac{dx}{dt}=2t,\quad \frac{dy}{dt}=e^t$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^t}{2t},\quad \frac{dy}{dx}\Big|_{t=1}=\frac{e^1}{2\cdot1}=\frac{e}{2}$$

……4 分

**3.** 求椭圆 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$ 上在点 $(1,2)$ 处的切线方程 (6 分).

**解.** 对方程 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$ 左右两端同时关于 $x$ 求导得到

$$x+\frac{y\cdot y'}{4}=0$$

解得

$$y'=\frac{-4x}{y}$$

……3 分

所求切线的斜率为

$$y'\big|_{x=1,y=2}=\frac{-4\cdot1}{2}=-2$$

装 订 线

线　订　装

切线方程为

$$y-2=-2(x-1)$$

可简化为

$$2x+y-4=0$$

……6 分

**4.** 设函数 $f(x)=\begin{cases} 2-x, & x>1 \\ ax^2, & -1\le x\le 1 \\ x-1, & x<-1 \end{cases}$. 已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续. (1) 请确定 $a$ 的值; (2) 求函数的间断点并判断其类型 (6 分).

**解.**

(1) $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，故

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=f(1)=a$$

即

$$\lim_{x\to1^-} ax^2=a=\lim_{x\to1^+}(2-x)=1=a.$$

……3 分

(2) 考虑 $x=-1$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}(x-1)=-2$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+} x^2=1$$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ 均存在, 且 $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, 故 $x=-1$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

……6 分

**五、综合应用题**（共 1 题，共 8 分）

已知某产品的需求函数为 $P(Q)=1000-2Q$, 成本函数为 $C(Q)=250+4Q$. 假设产销平衡, 则

(1) 写出收益函数 $R(Q)$ 和利润函数 $L(Q)$.

(2) 写出边际收益函数; 在仅考虑收益的情形下, 合理的产量 $Q$ 应为多少?

(3) 产量 $Q$ 为多少时利润最大?

**解.**

(1) 收益函数 $R(Q)=P(Q)\cdot Q=1000Q-2Q^2$.

利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=1000Q-2Q^2-250-4Q=996Q-250-2Q^2$

……2 分

(2) 边际收益函数 $R'(Q)=1000-4Q$. 应该控制产量 $Q$ 使得 $R'(Q)=0$, 即 $1000-4Q=0$, 解得 $Q=250$.

……4 分

(3) 对利润函数求导数

$$L'(Q)=996-4Q$$

令 $L'(Q)=996-4Q=0$, 解得 $Q=249$, 并且 $L''(Q)=-4<0$, 故 $Q=249$ 为唯一极大值点, 且无极小值点, 因此产量 $Q=249$ 时利润最大.

……8 分

装

订

线