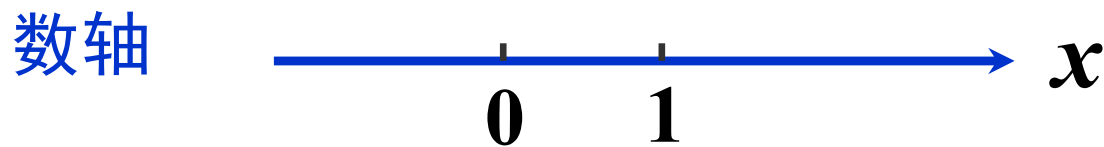
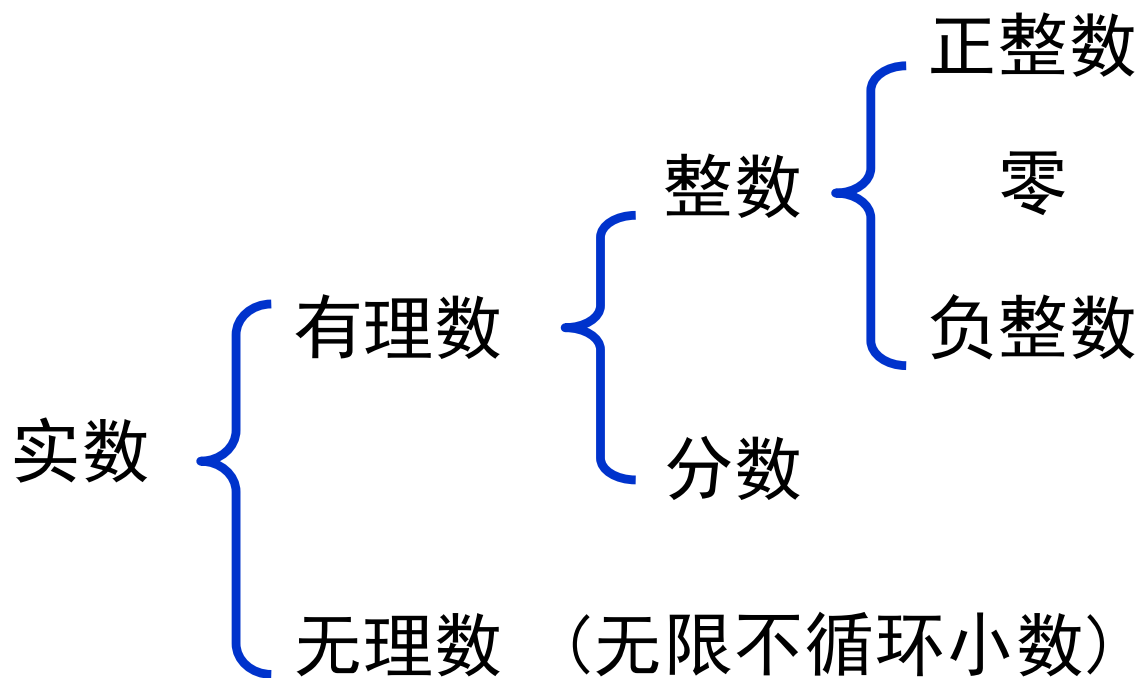


第二节 实数集

(一) 实数与数轴



实数与数轴上的点是一一对应的。

有理数: $\frac{p}{q}$

其中 p, q 为既约整数, 且 $q \neq 0$.

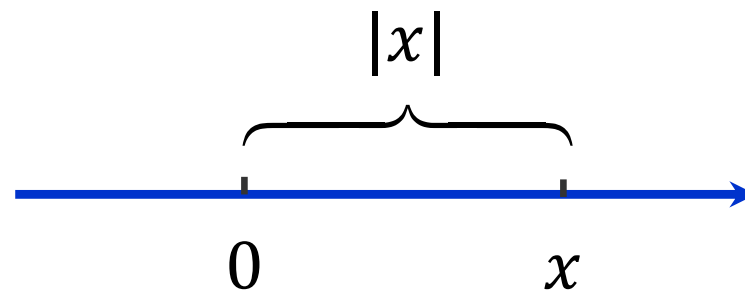
第二节 实数集

(二) 绝对值

设 x 为一实数，则其绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

几何意义： $|x|$ 表示数轴上点 x 到原点的距离。



$|x - y|$ 表示数轴上两点 x 和 y 之间的距离。

第二节 实数集

(二) 绝对值

绝对值不等式的解：

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a ;$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ 或 } x > a$$

$$|a| = \sqrt{a^2} ;$$

第二节 实数集

(二) 绝对值

$$|3x| < 3 \longrightarrow -3 < 3x < 3 \longrightarrow -1 < x < 1$$

$$|x| > 3 \longrightarrow x > 3 \text{ 或 } x < -3$$

随堂练习

- 利用绝对值不等式求出以下不等式中的未知数 x 的取值范围

$$(1) |3x - 1| > 2$$

$$(2) |2x - 4| \leq 4$$

$$(3) \sqrt{(x - 1)^2} \geq 2$$

$$(4) \sqrt{(x - 2)^2} < 1$$

解答：

$$(1) x > 1 \text{ 或 } x < -\frac{1}{3}$$

$$(2) 0 \leq x \leq 4$$

$$(3) x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -1$$

$$(4) 1 < x < 3$$

第二节 实数集

(三) 区间

我们都知道数轴上的第一个点对应一个实数，那么
数轴上的一段怎么表示？



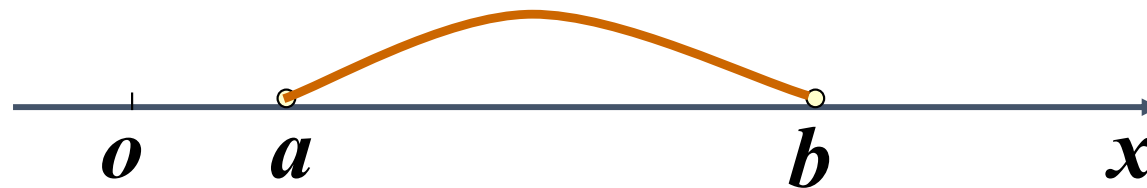
第二节 实数集

(三) 区间

我们都知道数轴上的第一个点对应一个实数，那么数轴上的一段怎么表示？



开区间 $(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x | a < x < b\}$



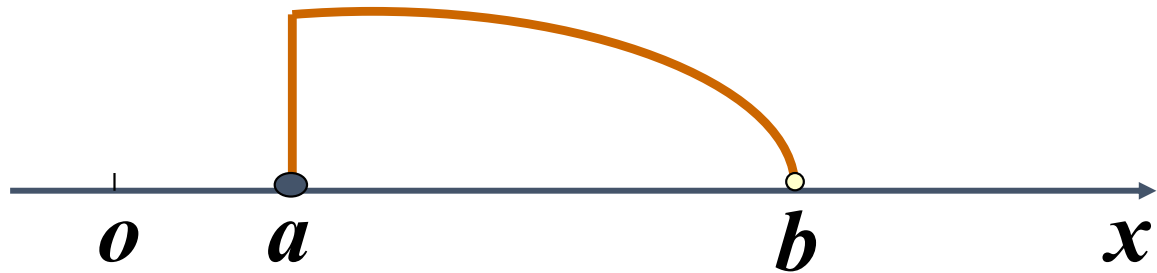
闭区间 $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x | a \leq x \leq b\}$



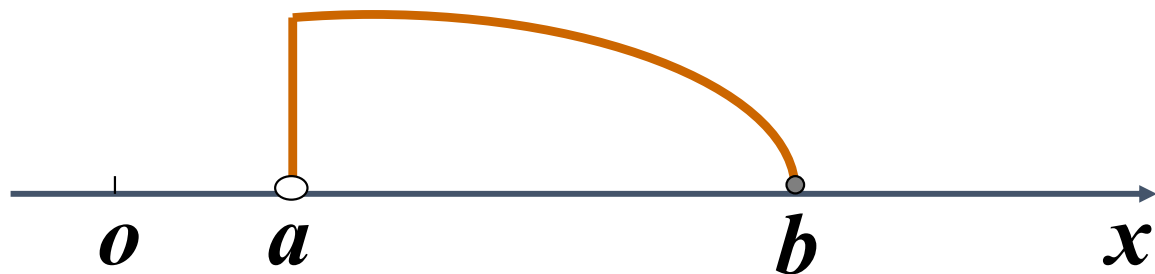
第二节 实数集

(三) 区间

半开区间 $[a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x | a \leq x < b\}$



半开区间 $(a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x | a < x \leq b\}$

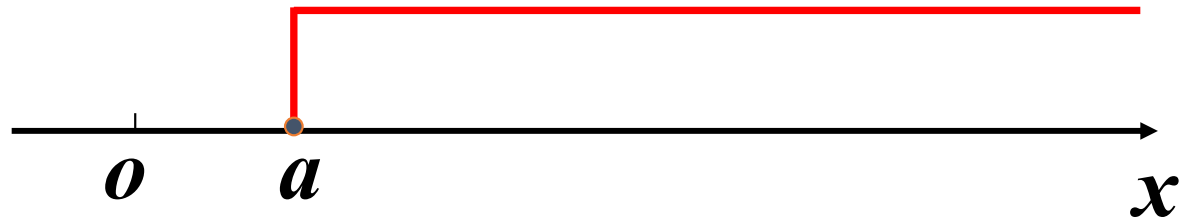


第二节 实数集

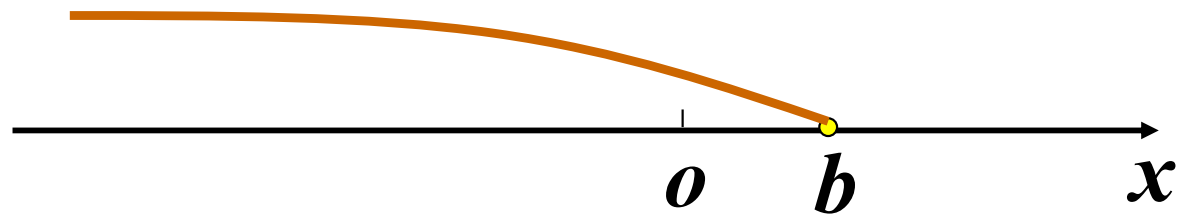
(三) 区间

无穷区间

$$[a, +\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \geq a\}$$

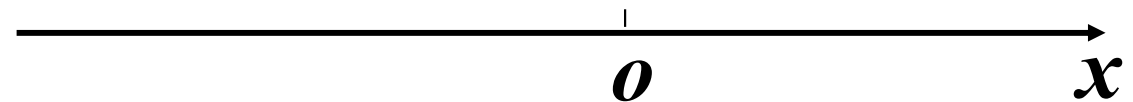


$$(-\infty, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x < b\}$$



$$(-\infty, +\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in R\}$$

表示任意的实数



随堂练习

- 根据区间定义，使用区间表示以下 x 的范围

(1) $-1 < x < 1$ (2) $-1 < x \leq 1$ (3) $-1 \leq x \leq 1$ (4) $-1 \leq x < 1$

(5) $x \geq 3$ (6) $x > 3$ (7) $x \leq -3$ (8) $x < -3$

(9) $x < -3$ 或 $x \geq 3$

解答：

(1) $(-1, 1)$ (2) $(-1, 1]$ (3) $[-1, 1]$ (4) $[-1, 1)$

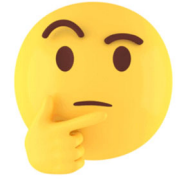
(5) $[3, +\infty)$ (6) $(3, +\infty)$ (7) $(-\infty, -3]$ (8) $(-\infty, -3)$

(9) $(-\infty, -3) \cup [3, +\infty)$

第二节 实数集

(四) 邻域

我们都知道数轴上的第一个点对应一个实数，那么
怎么在数轴上表示某一个点的邻居？



实数 x 的左邻右里

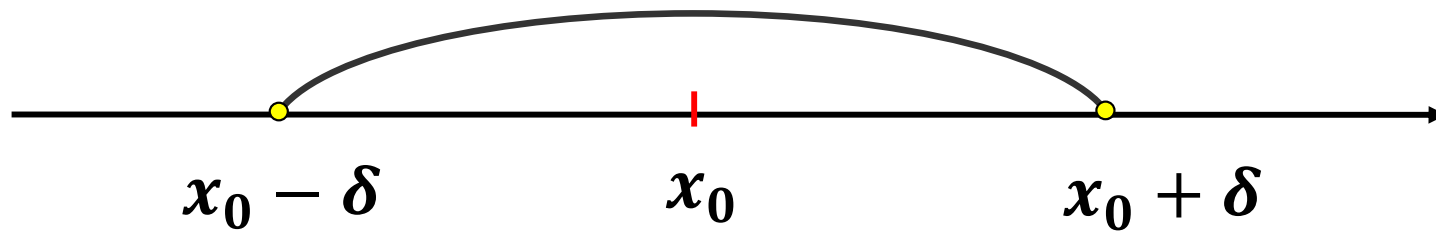


第二节 实数集

(四) 邻域

邻域 在数轴上, 以点 x_0 为中心, 以 $\delta(> 0)$ 为半径的**开区间** $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 称为 x_0 的**邻域**, 记为 $U(x_0, \delta)$ 。

$$U(x_0, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$



例如

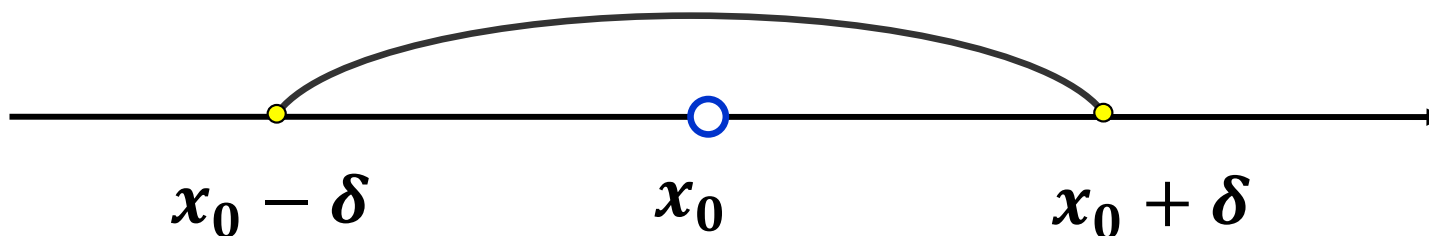
$$U\left(1, \frac{1}{2}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \mid 1 - \frac{1}{2} < x < 1 + \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \mid \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

第二节 实数集

(四) 邻域

空心邻域 在数轴上，以点 x_0 为中心，以 $\delta(> 0)$ 为半径，且不包括 x_0 的**开区间** $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ ，称为 x_0 的**空心邻域**，记为 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 。

$$\dot{U}(x_0, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 \text{ 或 } x_0 < x < x_0 + \delta\}$$



例如

$$\begin{aligned} \dot{U}\left(1, \frac{1}{2}\right) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \mid 1 - \frac{1}{2} < x < 1 \text{ 或 } 1 < x < 1 + \frac{1}{2}\right\} \\ &= \left\{x \mid \frac{1}{2} < x < 1 \text{ 或 } 1 < x < \frac{3}{2}\right\} = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

随堂练习

- 请写出以 $x_0 = 3$ 为中心，以 $\delta = 1$ 为半径的邻域

$$U(3,1) = (2,4)$$

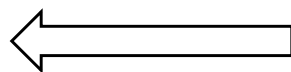
- 请写出以 $x_0 = 3$ 为中心，以 $\delta = 1$ 为半径的空心邻域

$$\dot{U}(3,1) = (2,3) \cup (3,4)$$

第三节 函数关系

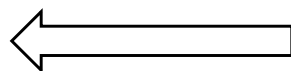
(一) 函数概念

- UP主收入



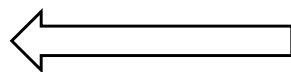
视频播放量

- BMI指数



体重

- 胜率

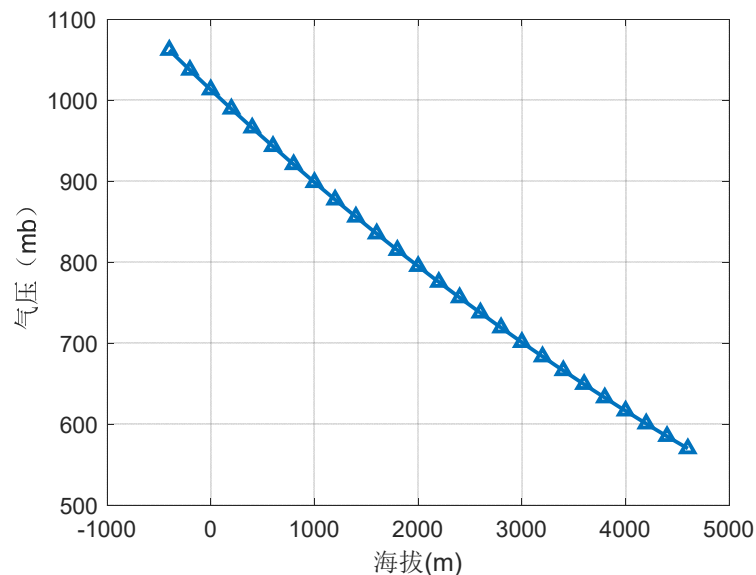


游戏中玩家的经济比

第三节 函数关系

(一) 函数概念

海拔(米)	气压 (mb)
-400	1062.2
-200	1037.5
0	1013.3
200	989.5
400	966.1
600	943.2
800	920.8
1000	898.7
1200	877.2
1400	856
1600	835.2
1800	814.9
2000	795
2200	775.4
2400	756.3
2600	737.5
2800	719.1
3000	701.1
3200	683.4
3400	666.2
3600	649.2
3800	632.6
4000	616.4
4200	600.5
4400	584.9
4600	569.7



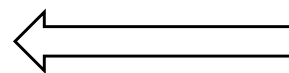
$$P_a = 101.3 \times \left[1 - 0.0255 \times \frac{H}{1000} \left(\frac{6357}{6357 + \frac{H}{1000}} \right) \right]^{5.256}$$

式中, P_a ——当地平均大气压, kPa;

H ——当地海拔高度, m。

因变量

函数关系



自变量

第三节 函数关系

(一) 函数概念

若 D 是一个非空集合，设有一个对应规则 f ，使得每一个 $x \in D$ 都有一个唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$ ， $x \in D$ 。

海拔(米)	-400	-200	0	200	400	600	800	1000	1200	1400
气压 (mb)	1062.2	1037.5	1013.3	989.5	966.1	943.2	920.8	898.7	877.2	856

$$P_a = 101.3 \times \left[1 - 0.0255 \times \frac{H}{1000} \left(\frac{6357}{6357 + \frac{H}{1000}} \right) \right]^{5.256}$$

式中， P_a ——当地平均大气压，kPa；

H ——当地海拔高度，m。

这个数学计算式即是对应法则

第三节 函数关系

(一) 函数概念

若 D 是一个非空集合，设有一个对应规则 f ，使得每一个 $x \in D$ 都有一个唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$ ， $x \in D$ 。

- 变量 x 称为自变量，变量 y 称为因变量
- 集合 D 称为函数 f 的定义域，记为 $D(f)$
- f 所有可能的取值构成的集合称为该函数的值域，记为

$$R_f = f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

- 不是所有的对应法则都可以用明确的数学公式表示

第三节 函数关系

(一) 函数概念

若 D 是一个非空集合，设有一个对应规则 f ，使得每一个 $x \in D$ 都有一个唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$ ， $x \in D$ 。

函数由定义域与对应规则这两个要素确定!!!

第三节 函数关系

(二) 函数的定义域

一些常见函数的自然定义域

- $y = \sqrt{x}, x \geq 0$

- $y = \log x, x > 0$

- $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$

要熟记!!!

随堂练习

- 请确定以下函数的(自然)定义域

$$(1) y = \sqrt{x-1}$$

$$(1) x \geq 1$$

$$(2) y = \sqrt{(x+1)^2}$$

$$(2) x \text{ 为任意实数}$$

$$(3) y = \sqrt{x^2-1}$$

$$(3) x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1$$

$$(4) y = \log_2(x-1)$$

$$(4) x > 1$$

$$(5) y = \log_2(x^2+1)$$

$$(5) x \text{ 为任意实数}$$

$$(6) y = \log_2(x^2-1)$$

$$(6) x > 1 \text{ 或 } x < -1$$

$$(7) y = \frac{1}{x-1}$$

$$(7) x \neq 1$$

$$(8) y = \frac{1}{x^2-1}$$

$$(8) x \neq 1 \text{ 且 } x \neq -1$$

$$(9) y = \frac{1}{x^2+1}$$

$$(9) x \text{ 为任意实数}$$

第三节 函数关系

(二) 函数的定义域

例1 求函数 $y = \sqrt{3x - 2}$ 的定义域

第三节 函数关系

(二) 函数的定义域

例1 求函数 $y = \sqrt{3x - 2}$ 的定义域

解 由函数的自然定义域知

$$3x - 2 \geq 0$$

故该函数的定义域为 $x \geq \frac{2}{3}$.

第三节 函数关系

(二) 函数的定义域

例1 求函数 $y = \frac{1}{\log_{10}(3x-2)}$ 的定义域

第三节 函数关系

(二) 函数的定义域

例1 求函数 $y = \frac{1}{\log_{10}(3x-2)}$ 的定义域

解 由函数的自然定义域知

$$3x - 2 > 0$$

且

$$\log_{10}(3x - 2) \neq 0, \text{ 即 } 3x - 2 \neq 1$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2 > 0 \\ 3x - 2 \neq 1 \end{array} \right\}, \text{ 故 } x > \frac{2}{3} \text{ 且 } x \neq 1,$$

该函数的定义域为 $(\frac{2}{3}, 1) \cup (1, +\infty)$

第三节 函数关系

(二) 函数的定义域

例2 判断函数 $y = x$ 与 $y = \frac{x^2}{x}$ 是否是相同的函数关系

例3 判断函数 $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 是否是相同的函数关系

第三节 函数关系

(二) 函数的定义域

例2 判断函数 $y = x$ 与 $y = \frac{x^2}{x}$ 是否是相同的函数关系

解：不是，因为定义域不同，前者 $D(f) = (-\infty, +\infty)$ ，
后者 $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

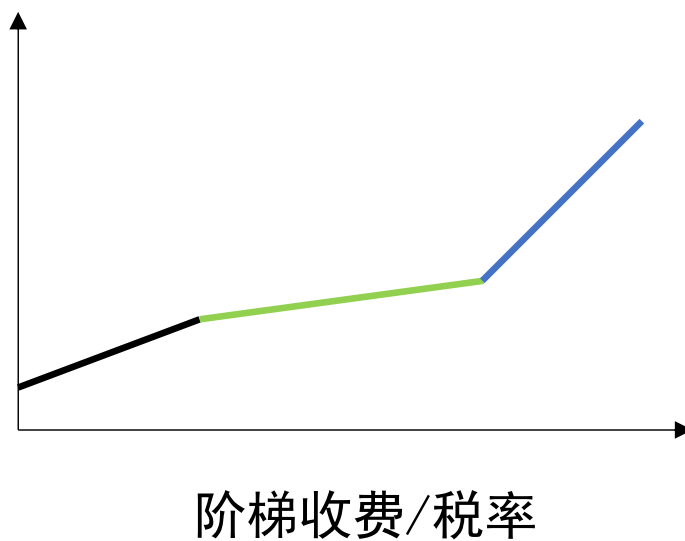
例3 判断函数 $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 是否是相同的函数关系

解：不是，因为对应法则不同，前者 $y = f(x) = x$
后者 $y = |x|$

第三节 函数关系

(三) 分段函数

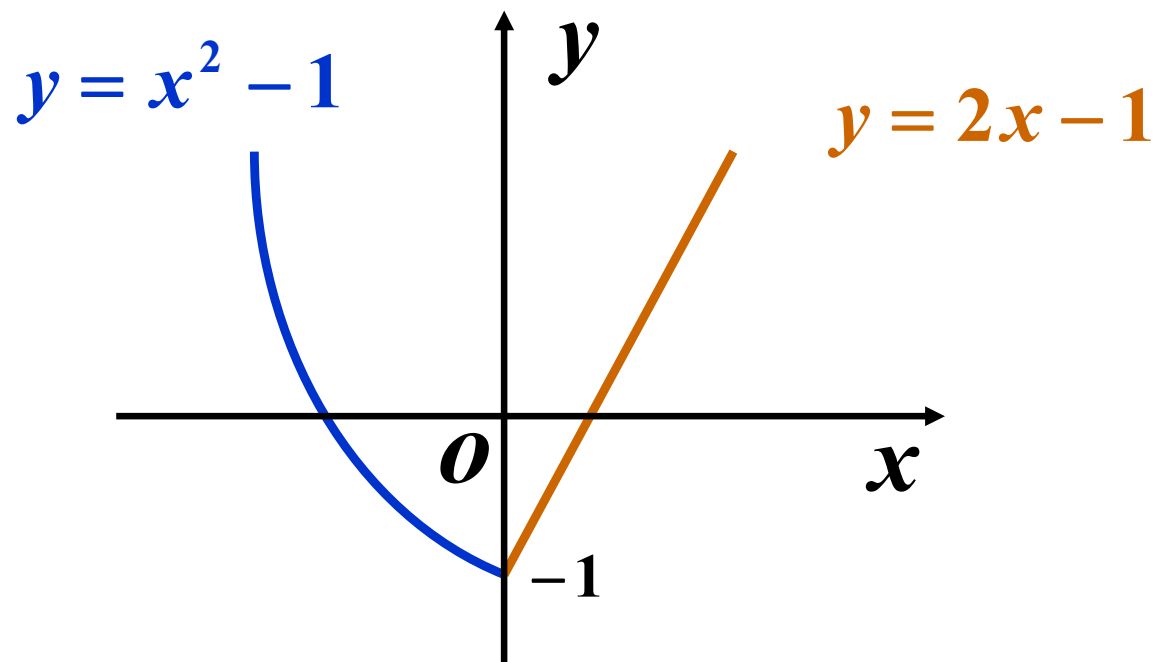
分段函数 在定义域内不能用单一的对应法则表示自变量 x 与因变量 y 的对应关系



第三节 函数关系

(三) 分段函数

例如, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0 \\ 2x - 1, & x > 0 \end{cases}$



注意：分段函数在其定义域内表示一个函数，而不是几个函数。

第三节 函数关系

(三) 建立函数关系例题

例4 某工厂生产某产品，每日最多生产100单位。它的日固定成本为130元，生产一个单位产品的可变成本为6元。求该厂日总成本函数及平均单位成本函数。

第三节 函数关系

(三) 建立函数关系例题

例4 某工厂生产某产品，每日最多生产100单位。它的日固定成本为130元，生产一个单位产品的可变成本为6元。求该厂日总成本函数及平均单位成本函数。

解 设日总成本为 C ，平均单位成本为 \bar{C} ，日产量为 x ，由题设知 $x \leq 100$ 。

日总成本由固定成本与可变成本组成，故

$$C = 130 + 6x, x \in [0, 100]$$

平均单位成本即为日总成本与日产量之比，

$$\bar{C} = \frac{130 + 6x}{x} = \frac{130}{x} + 6, x \in (0, 100]$$