微积分I

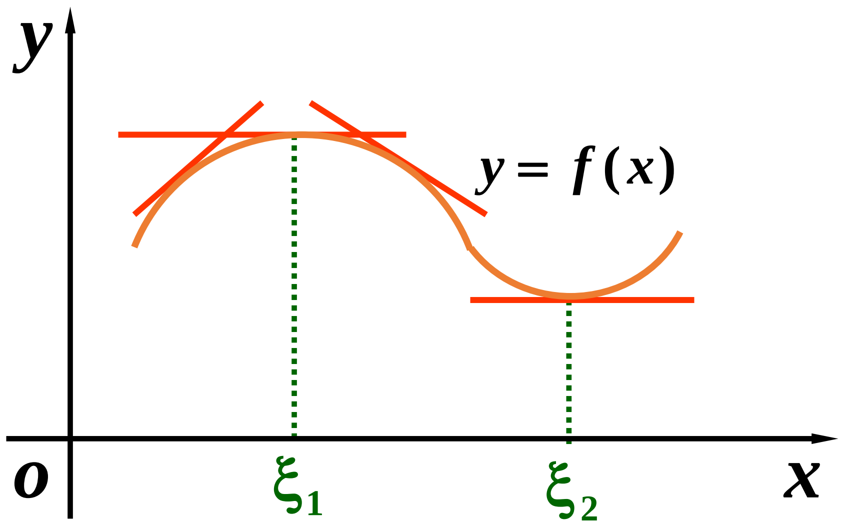
3学分、外招

第四章 中值定理及导数的应用

数学系王伟文

第一节 中值定理

费马定理 若函数$f(x)$在(a,b)内一点x_0取得最大值或最小值，且$f(x)$在点x_0可导，则$f'(x_0)=0$

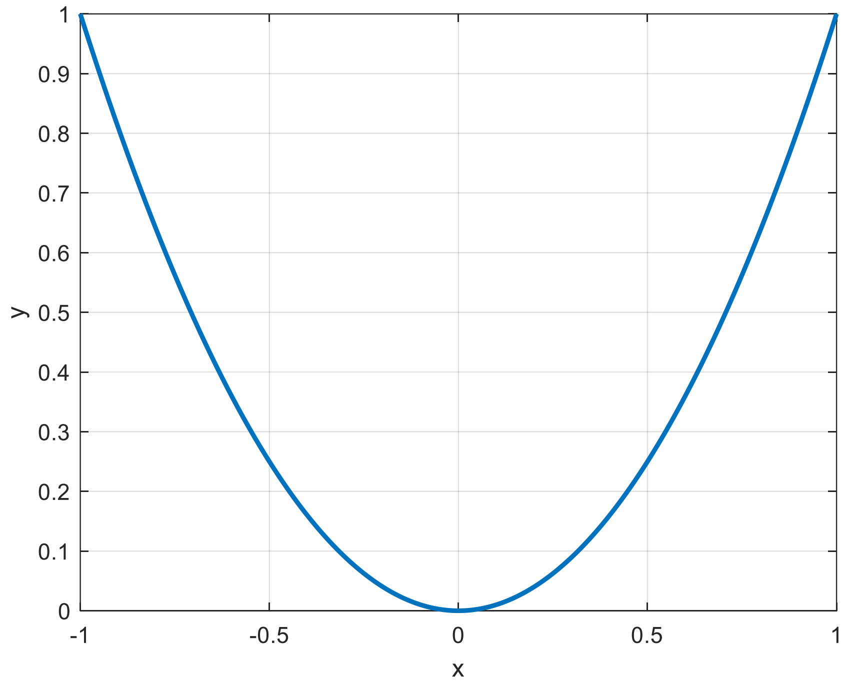


几何解释：曲线在最高点或最低点如果有切线，则切线必然是水平的

第一节 中值定理

费马定理 若函数$f(x)$在(a,b)内一点x_0取得最大值或最小值，且$f(x)$在点x_0可导，则$f'(x_0)=0$

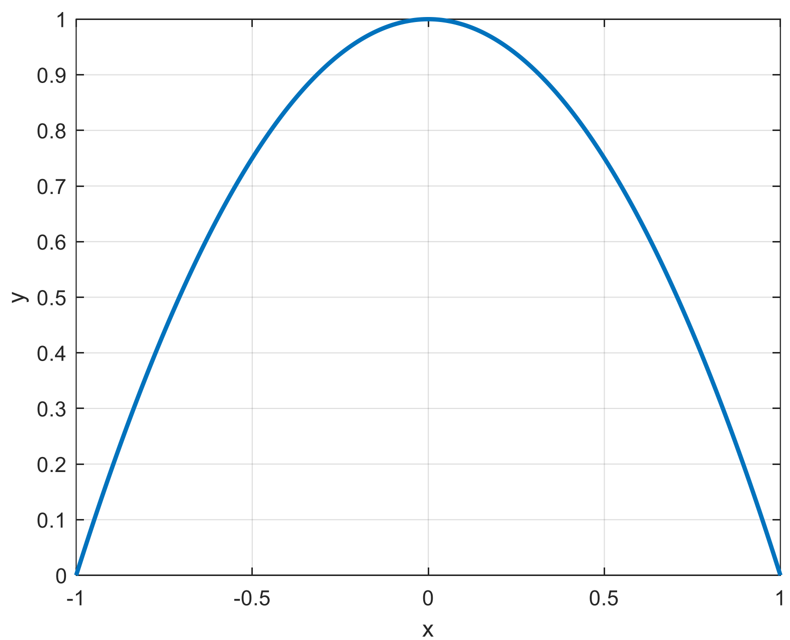
例1 讨论开区间$(-1,1)$上的函数$y=f(x)=x^2$，当$x=0$时，函数在$(-1,1)$内取得最小值$f(x)=0$, 可以验证$f'(0)=0$



第一节 中值定理

费马定理 **若函数$f(x)$在(a,b)内一点x_0取得最大值或最小值，且$f(x)$在点x_0可导，则$f'(x_0)=0$**

例2 讨论开区间$(-1,1)$上的函数$y=f(x)=1-x^2$，当$x=0$时，函数在$(-1,1)$内取得最大值$f(0)=1$, 可以验证$f'(0)=0$




暨南大學
JINAN UNIVERSITY

第一节 中值定理

罗尔中值定理 若函数$f(x)$满足以下3个条件：

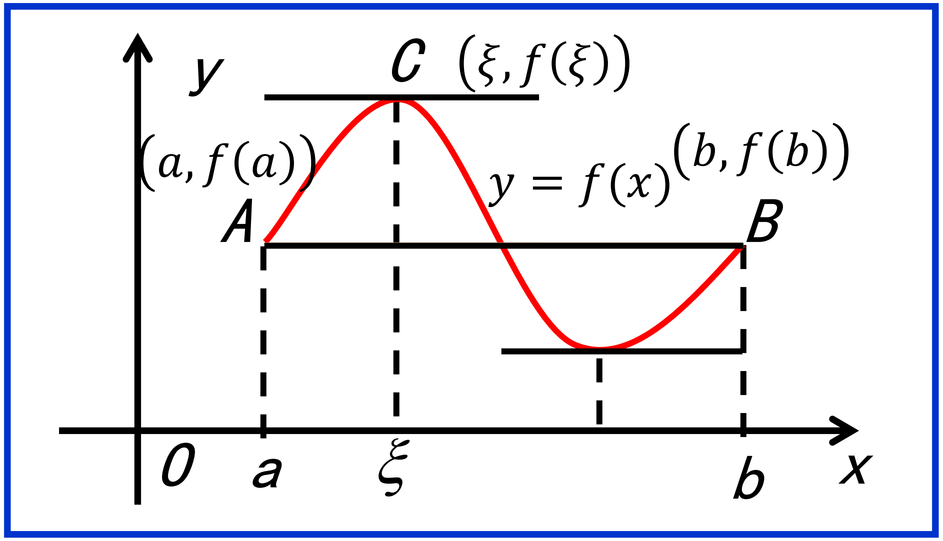
a. 在闭区间$[a,b]$上连续；

b. 在开区间(a,b)上可导；

c. 在区间的两个端点函数值相等，即$f(a)=f(b)$；

则至少存在一点$\xi \in (a,b)$，满足$f'(\xi)=0$

如果连续光滑曲线$y=f(x)$在点A、B处的纵坐标相等，那么在弧$\widehat{AB}$上至少有一点$C(\xi,f(\xi))$，曲线在C点的切线平行于x轴



第一节 中值定理

课本例1 函数$f(x)=x^2-2x-3$在区间$[-1,3]$上罗尔中值定理成立

解： 显然$f(x)=x^2-2x-3$在$[-1,3]$上连续 满足条件1

$f(x)=x^2-2x-3$在$(-1,3)$上可导 满足条件2

$f(-1)=0=f(3)$ 满足条件3

因此$f(x)$满足罗尔中值定理的3个条件，故必然存在一点$\xi\in(-1,3)$，满足$f'(\xi)=0$

事实上因为$f'(x)=2(x-1)$，所以有$f'(1)=0$，$1\in(-1,3)$，上述结论中可取$\xi=1$

第一节 中值定理

拉格朗日中值定理 若函数$f(x)$满足以下2个条件：

a. 在闭区间$[a,b]$上连续；

b. 在开区间(a,b)上可导；

则至少存在一点$\xi \in (a,b)$，满足

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

或等价地

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

- 在上述两个条件的基础上，若在区间的两个端点函数值相等，即$f(a) = f(b)$，则有$f'(\xi) = 0$，拉格朗日中值定理即为罗尔中值定理。

第一节 中值定理

拉格朗日中值定理的一个推论 若函数$f(x)$在区间(a,b)内任意一点的导数$f'(x)=0$，则函数$f(x)$在(a,b)内是一个常数

在区间内导数为0的函数，在这个区间上必然是一个常数

第二节 洛必达法则

洛必达法则是求这类未定式极限的一种重要方法

在函数商的极限中，如果分子分母同是无穷小或同是无穷大，那么极限可能存在，也可能不存在，这种极限称为**未定式**，记为

$$\frac{0}{0} \quad 及 \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}(n>0)$$

第二节 洛必达法则

设函数$f(x)$与$g(x)$满足条件：

（1） $\lim\limits_{x\to P} f(x)=\lim\limits_{x\to P} g(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to P} f(x)=\lim\limits_{x\to P} g(x)=\infty$

（2） 在$x\to P$的某个邻域内可导，且$g'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to P}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (或∞)

则必有

$$\lim_{x\to P}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to P}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$$

- 洛必达法则表明，若满足洛必达法则的使用条件，求极限$\lim\limits_{x\to P}\dfrac{f(x)}{g(x)}$可以等价与求极限$\lim\limits_{x\to P}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

第二节 洛必达法则

课本例1 求$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

解：

$$原式=\lim_{x\to 2}\frac{(x^4-16)'}{(x-2)'}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4x^3}{1}$$

$$=\lim_{x\to 2}4x^3$$

$$=4\cdot 2^3=32$$

$\lim\limits_{x\to 2}(x^4-16)=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$

$f(x)=x^4-16$和$g(x)=x-2$均可导

且$g'(x)=1$在$x=2$的的某个空心邻域内不等于0

故符合洛必达法则的使用条件

第二节 洛必达法则

课本例10 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$

解：

原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(x^2)'}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x}$ $\dfrac{\infty}{\infty}$

再次符合洛必达法则的使用条件

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(2x)'}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}$

$=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

$f(x)=e^x$ 和$g(x)=x^2$均可导

且$g'(x)=2x$在$x\to+\infty$的过程中不等于0

故符合洛必达法则的使用条件

只要满足洛必达法则的使用条件都可以使用洛必达法则

第二节 洛必达法则

课本例4 求$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ $\frac{0}{0}$

解：

$$原式 = \lim_{x \to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(6x)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

第二节 洛必达法则

例 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ $\qquad \dfrac{0}{0}$

解：

$$原式=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-3x+2)'}{(x^3-x^2-x+1)'}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1} \qquad \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(3x^2-3)'}{(3x^2-2x-1)'}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}$$

不是$\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$，不能使用洛必达法则

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}6x}{\lim\limits_{x\to 1}(6x-2)}=\frac{3}{2}$$

第二节 洛必达法则

例 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$ $\qquad \dfrac{\infty}{\infty}$

解：

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\cos x)'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1-\sin x)$$

此极限不存在，不符合洛必达法则使用条件

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\cos x\right)=1$

第二节 洛必达法则

洛必达法则不是无所不能

- 若不是$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$的未定式，不能使用洛必达法则化简极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}$$

- 当$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$不是常数A且不为∞时，不能断言$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$不存在，只能说明使用洛必达法则失效，需要使用其他的解决方法

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}$$

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

$0\cdot\infty$ $\infty-\infty$ 0^0 1^∞ ∞^0

转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式求解

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式求解

$$0\cdot\infty \longrightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$0\cdot\infty \longrightarrow 0/\frac{1}{\infty} \longrightarrow \frac{0}{0}$$

$$\infty-\infty \longrightarrow \frac{1}{0}-\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{0-0}{0}$$

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式求解

$$\left.\begin{matrix} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \left\{\begin{matrix} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \\ 0\cdot\ln\infty \end{matrix}\right. \quad \Rightarrow 0\cdot\infty.$$

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

课本例11 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot(\frac{\pi}{2}-\arctan x)$ $(\infty\cdot 0)$

解: 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$ $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{\pi}{2}-\arctan x)'}{(\frac{1}{x})'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$$

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}]$ $(\infty-\infty)$

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\cdot x}$$ 等价无穷小替换 $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(2x+1)}=\frac{1}{2}$$

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

课本例13 求$\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ (1^{∞})

解： 原式 $= e^{\lim\limits_{x\to 1}[\ln x^{\frac{1}{1-x}}]}$

$$\lim_{x\to 1}[\ln x^{\frac{1}{1-x}}] = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x\to 1} -\frac{1}{x} = -1$$

故原式 $= e^{\lim\limits_{x\to 1}[\ln x^{\frac{1}{1-x}}]} = e^{-1}$

$f(x) = e^{\ln f(x)}$

e^x为连续函数

$\lim f(x) = \lim e^{\ln f(x)}$

$= e^{\lim[\ln f(x)]}$

要求$\lim f(x)$，先求$\lim[\ln f(x)]$

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

课本例14 求 $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$ (0^0)

解： $原式 = e^{\lim\limits_{x\to0^+}[\ln\ x^x]}$

$$\lim_{x\to0^+}[\ln\ x^x] = \lim_{x\to0^+} x\ln x \qquad 0\cdot\infty$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} -x = 0$$

$$故原式 = e^{\lim\limits_{x\to0^+}[\ln\ x^x]} = e^0 = 1$$

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

例 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}}$ ∞^0

解：原式 $= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)^{\frac{1}{x}}]}$

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)^{\frac{1}{x}}] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{[\ln(1+e^x)]'}{x'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(1+e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$$

故原式 $= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)^{\frac{1}{x}}]} = e^1 = e$

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

课本例18 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-\sin x}-1}{\arcsin x^3}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-\sin x}-1}{\arcsin x^3}$$ 等价无穷小替换

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$ $\dfrac{0}{0}$ 洛必达法则

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$ 等价无穷小替换

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

洛必达法则与等价无穷小替换、凑重要极限等其他求解极限的方法结合使用

练习

使用洛必达法则求解以下极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 1}{\ln x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\sin x}$

(6) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x^2}$