微积分I

3学分、外招

第四章 中值定理及导数的应用

数学系王伟文

第一节 函数的增减性

单调增加 设函数$f(x)$的在区间(a,b)上有定义，若对于任意$x_1,x_2\in(a,b)$,

当$x_1<x_2$时，总有$f(x_1)<f(x_2)$，

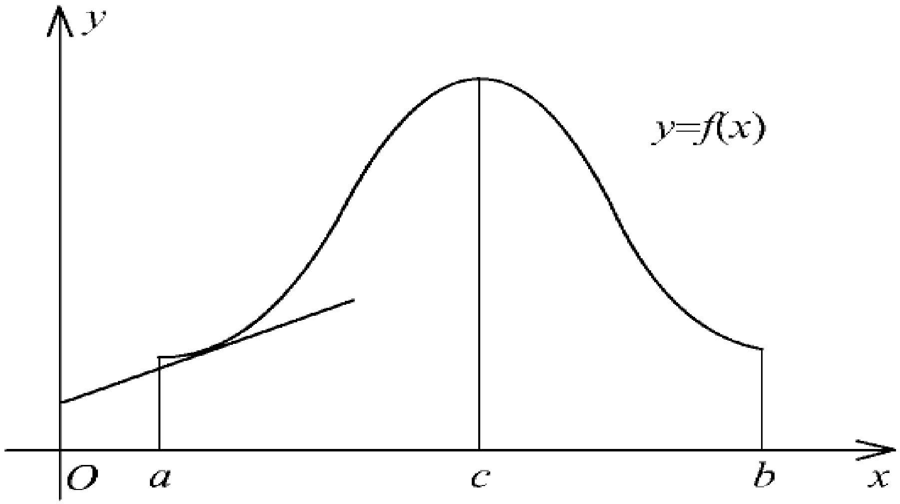
则称$f(x)$**在区间(a,b)上是单调增加**的.

单调减少 设函数$f(x)$的在区间(a,b)上有定义，若对于任意$x_1,x_2\in(a,b)$,

当$x_1<x_2$时，总有$f(x_1)>f(x_2)$，

则称$f(x)$**在区间(a,b)上是单调减少**的.

第一节 函数的增减性



- 函数$f(x)$在区间(a,c)上单调递增，在区间(c,b)上单调递减
- 函数$f(x)$在区间(a,c)上每一点切线的斜率即$f'(x)$均大于0，区间(c,b)上每一点切线的斜率即$f'(x)$均小于0

第一节 函数的增减性

设函数$f(x)$在区间(a,b)内可导，则

(1) 如果$x\in(a,b)$是总有$f'(x)>0$，则$f(x)$在(a,b)内单调增加；

(2) 如果$x\in(a,b)$是总有$f'(x)<0$，则$f(x)$在(a,b)内单调减少；

- 证明思路：利用拉格朗日中值定理，证明导数的符号能够推出函数单调性的定义

第一节 函数的增减性

课本例1 确定函数$f(x)=x^3-3x$的单调增减区间。

- **由前面的定理知道，当 $f'(x)>0$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $f'(x)<0$ 时，函数$f(x)$单调递减**
- **所以单调递增区间$\{x|f'(x)>0\}$，单调递减区间即$\{x|f'(x)<0\}$**

第一节 函数的增减性

!!!关于二次函数不等式的解

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

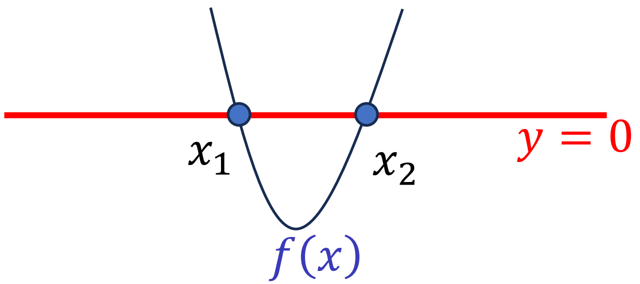
已知方程$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$的两个根为x_1、$x_2(x_1 < x_2)$

若$a > 0$，即函数的开口向上，

从函数图像可知

$f(x) = ax^2 + bx + c > 0$的解为
$x > x_2$或$x < x_1$，即$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

$f(x) = ax^2 + bx + c < 0$的解为
$x_1 < x < x_2$，即$x \in (x_1, x_2)$

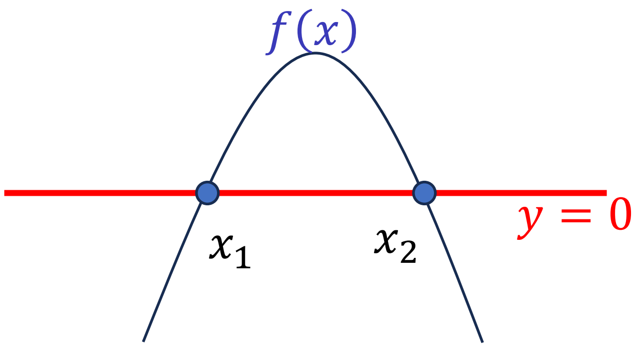


第一节 函数的增减性

!!!关于二次函数不等式的解

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

已知方程$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$的两个根为x_1、$x_2(x_1 < x_2)$



若$a < 0$，即函数的开口向下，

从函数图像可知

$f(x) = ax^2 + bx + c > 0$的解为
$x_1 < x < x_2$，即$x \in (x_1, x_2)$

$f(x) = ax^2 + bx + c < 0$的解为
$x > x_2$或$x < x_1$，即$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

第一节 函数的增减性

课本例1 确定函数$f(x)=x^3-3x$的单调增减区间。

解： 函数$f(x)$单调递增区间为$\{x|f'(x)>0\}$，单调递减区间为$\{x|f'(x)<0\}$

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

若$f'(x)=3(x+1)(x-1)>0$

解得$x>1$或$x<-1$, 即$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

故函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

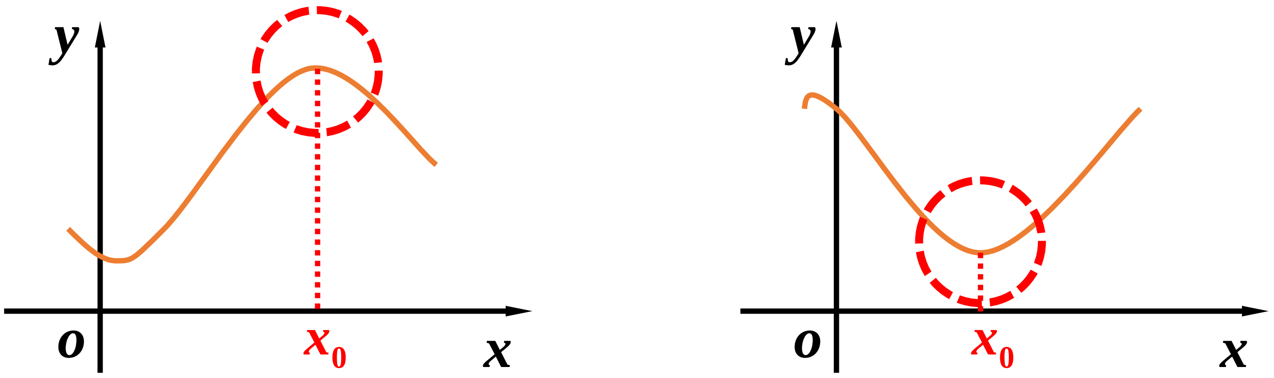
若$f'(x)=3(x+1)(x-1)<0$

解得$-1<x<1$, 即$x\in(-1,1)$

故函数$f(x)$的单调递减区间为$(-1,1)$

ÉTAPE 12
BRIANÇON ~
ALPE D'HUEZ
165.1KM
ALPE
D'HUEZ
BRIANÇON
COL DU
GALIBIER
COL DE LA
CROIX DE FER
ALPE
D'HUEZ

第二节 函数的极值



第二节 函数的极值

函数极值 如果函数$f(x)$在点$x = x_0$的一个δ邻域$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$内有定义，

- 对于任意$x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$，总有$f(x) < f(x_0)$，则**称$f(x_0)$为函数$f(x)$的极大值，$x_0$称为函数的极大值点**
- 对于任意$x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$，总有$f(x) > f(x_0)$，则称**$f(x_0)$为函数$f(x)$的极小值，$x_0$称为函数的极小值点**

- **极大值与极小值统称为极值，极大值点与极小值点统称为极值点**
- **极值只是一个局部的概念，它在一个邻域内的函数值比较，注意极大值不一定是最大值，极小值不一定是最小值**

第二节 函数的极值

函数极值的必要条件 如果函数$f(x)$在点x_0处有极值$f(x_0)$且$f'(x_0)$存在，则

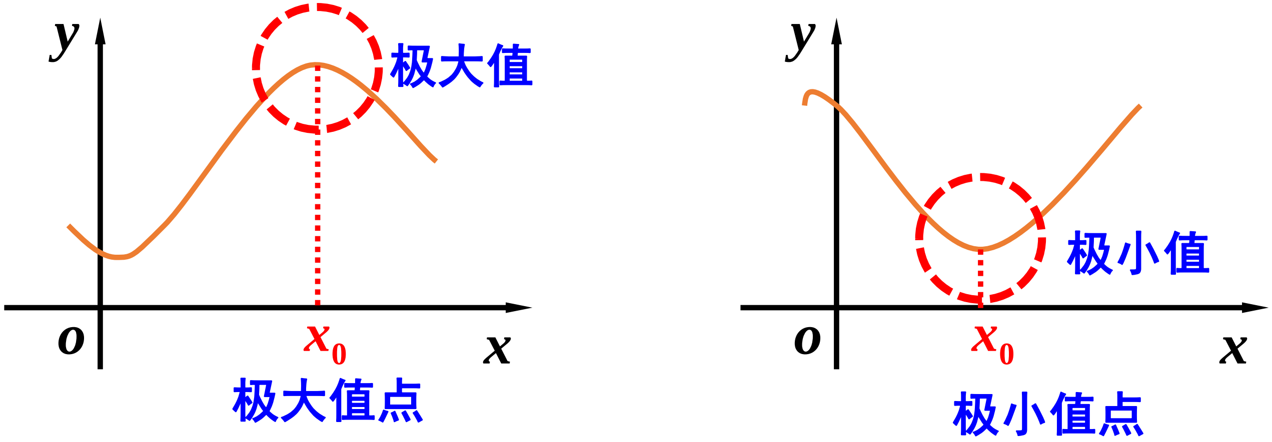
$$f'(x_0)=0$$

可导(可微)函数在极值点处的导数必定为零

使$f'(x)=0$的点称为函数的驻点，驻点可能是函数极值点，也可能不是函数的极值点

例如$f(x)=x^3$，$f'(0)=0$，但$x=0$不是极值点

第二节 函数的极值



- 极大值点在它的左邻域单调递增，在它的右邻单调递减　　盛极必衰
- 极小值点在它的左邻域单调递减，在它的右邻单调递增　　触底反弹

第二节 函数的极值

函数极值的判断定理 设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内连续并且可导($f'(x_0)$可以不存在)。

- **如果当$x\in(x_0-\delta, x_0)$时$f'(x)>0$，而当$x\in(x_0, x_0+\delta)$时$f'(x)<0$，则函数$f(x)$在x_0处取得极大值$f(x_0)$**
- **如果当$x\in(x_0-\delta, x_0)$时$f'(x)<0$，而当$x\in(x_0, x_0+\delta)$时$f'(x)>0$，则函数$f(x)$在x_0处取得极小值$f(x_0)$**
- **如果当$x\in(x_0-\delta, x_0)$和$x\in(x_0, x_0+\delta)$时，$f'(x)$不变号，则函数$f(x)$在x_0处无极值**

先增后减极大值，先减后增极小值，导数不变号无极值

第二节 函数的极值

例 确定函数$f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$的单调增减区间和极值。

解： 先求导数

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

令$f'(x) = 0$，解得驻点

$$x_1 = 0，x_2 = 2$$

这2个点将$(-\infty, +\infty)$分成3个区间

$$(-\infty, 0)，(0, 2)，(2, +\infty)$$

我们可以通过考察导数$f'(x)$在这3个区间上的符号判断对应区间上函数的单调性

第二节 函数的极值

例 确定函数$f(x)=x^3-3x^2+7$的单调增减区间和极值。

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

制作表格

$\boldsymbol{x}$	$(-\infty,0)$	$\mathbf{0}$	$(0,\mathbf{2})$	$\mathbf{2}$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	>0	0	<0	0	>0
$f(x)$	$\uparrow$	极大值 $f(0)=7$	$\downarrow$	极小值 $f(2)=3$	$\uparrow$

由表格可知，函数$f(x)$在区间$(-\infty,0\ )\cup(2,+\infty)$上单调递增，在区间$(0,2)$上单调递减。

函数$f(x)$在$x=0$处取得极大值$f(\mathbf{0})=7$，在$x=2$处取得极小值$f(2)=3$。

第二节 函数的极值

课本例1 确定函数$f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$的单调增减区间和极值。

解： 先求导数

$$f'(x)=(x-1)(x+1)^2(5x-1)$$

令$f'(x)=0$，解得驻点

$$x_1=1，x_2=-1，x_3=\frac{1}{5}$$

这3个点将$(-\infty,+\infty)$分成4个区间

$$(-\infty,-1)，\left(-1,\frac{1}{5}\right)，\left(\frac{1}{5},1\right)，(1,+\infty)$$

我们可以通过考察导数$f'(x)$在这4个区间上的符号判断对应区间上函数的单调性

第二节 函数的极值

课本例1 确定函数$f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$的单调增减区间和极值。

$$f'(x)=(x-1)(x+1)^2(5x-1)$$

制作表格

x	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,\frac{1}{5}\right)$	$\frac{1}{5}$	$\left(\frac{1}{5},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	>0	0	>0	0	<0	0	>0
$f(x)$	$\uparrow$	非极值	$\uparrow$	极大值 $f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{3456}{3125}$	$\downarrow$	极小值 $f(1)=0$	$\uparrow$

由表格可知，函数$f(x)$在区间$\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)\cup(1,+\infty)$上单调递增，在区间$\left(\frac{1}{5},1\right)$上单调递减。

函数$f(x)$在$x=\frac{1}{5}$处取得极大值$f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{3456}{3125}$，在$x=1$处取得极小值$f(1)=0$。

第二节 函数的极值

课本例2 确定函数$f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$的单调增减区间和极值。

解： 先求导数

$$f'(x)=1-x^{-\frac{1}{3}}$$

令$f'(x)=0$，解得驻点$x=1$

同时注意到$f'(x)$在$x=0$处无定义，因此函数可能在这两点取得极值

$x=0$和$x=1$将$(-\infty,+\infty)$划分成3个区间

$$(-\infty,0)，(0,1)，(1,+\infty)$$

第二节 函数的极值

课本例2 确定函数$f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$的单调增减区间和极值。

解：

$$f'(x)=1-x^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$\boldsymbol{x}$	$(-\infty,0)$	$\mathbf{0}$	$(0,\mathbf{1})$	$\mathbf{1}$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	>0	无定义	<0	0	>0
$f(x)$	$\uparrow$	极大值 $f(0)=0$	$\downarrow$	极小值 $f(1)=-\frac{1}{2}$	$\uparrow$

由表格可知，函数$f(x)$在区间$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$上单调递增，在区间$(0,1)$上单调递减。

函数$f(x)$在$x=0$处取得极大值$f(\mathbf{0})=0$，在$x=1$处取得极小值$f(1)=-\frac{1}{2}$。

第二节 函数的极值

课本例2表明，驻点与函数不可导点均可能是函数取得极大(小)值的点(极值点)，**因此在求极值及极值点时，均需要考察驻点与不可导点左右两侧函数的单调性**

第二节 函数的极值

函数极值的判断定理 设$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)$存在，

- 如果$f''(x_0)<0$，则函数$f(x)$在x_0处取得极大值$f(x_0)$
- 如果$f''(x_0)>0$，则函数$f(x)$在x_0处取得极小值$f(x_0)$

驻点处二阶导数大于0，必为极小值点；驻点处二阶导数小于0，必为极大值点

第二节 函数的极值

课本例3 求函数$f(x) = x^3 - 3x$的极值。

解： 先求导数

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

令$f'(x) = 0$，解得驻点$x_1 = 1$，$x_2 = -1$

求$f(x)$的二阶导数

$$f''(x) = 6x$$

因为$f'(1) = 0$，且$f''(1) = 6 > 0$，故函数$f(x)$在$x = 1$处取得极小值$f(1) = -2$

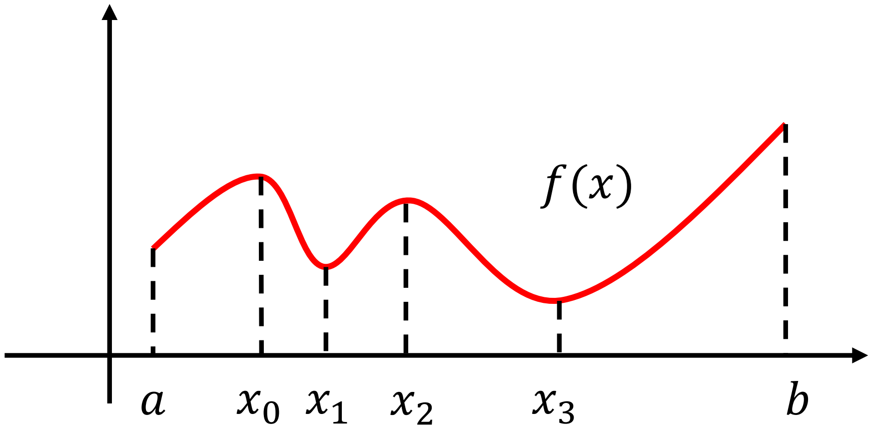
因为$f'(-1) = 0$，且$f''(-1) = -6 < 0$，故函数$f(x)$在$x = -1$处取得极大值$f(-1) = 2$

第三节 函数最大值与最小值

函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则函数在该区间必取得最大值与最小值

- 函数在区间$[a,b]$上的最大值：存在一点$x_0 \in [a,b]$，使得对于任意$x \in [a,b]$，有$f(x) \le f(x_0)$，则称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值为$f(x_0)$。
- 函数在区间$[a,b]$上的最小值：存在一点$x_0 \in [a,b]$，使得对于任意$x \in [a,b]$，有$f(x) \ge f(x_0)$，则称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最小值为$f(x_0)$。

最大值与极大值、最小值与极小值是不同的概念！！！



极大值：$f(x_0)$、$f(x_2)$

极小值：$f(x_1)$、$f(x_3)$

最小值：$f(x_3)$

最大值：$f(b)$

第三节 函数最大值与最小值

求函数$f(x)$在区间$[a,b]$上最大值或最小值的基本步骤

1. 先求出函数$f(x)$的全部驻点及不可导点

2. 求出函数在这些驻点与不可导点的函数值

3. 再求出函数在区间端点的函数值$f(a)$和$f(b)$

4. 比较这些函数值的大小

最大者即区间$[a,b]$上最大值

最小者即区间$[a,b]$上最小值

第三节 函数最大值与最小值

课本例1 求函数$f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$在区间$[-1,\frac{27}{8}]$上的最大值与最小值。

解： 先求导数

$$f'(x)=1-x^{-\frac{1}{3}}$$

令$f'(x)=0$，解得驻点$x=1$

同时注意到$f'(x)$在$x=0$处无定义，即$x=0$为不可导点

$$f(1)=-\frac{1}{2} \qquad f(0)=0 \qquad f(-1)=-\frac{5}{2} \qquad f\left(\frac{27}{8}\right)=0$$

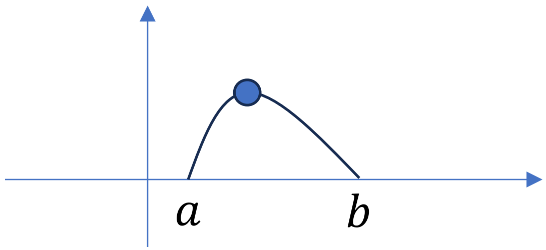
比较这些函数值的大小，可以得出$f(x)$在区间$[-1,\frac{27}{8}]$上的最大值为

$$f(0)=f\left(\frac{27}{8}\right)=0$$

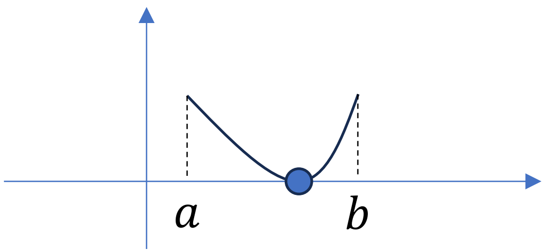
最小值为$f(-1)=-\frac{5}{2}$。

第三节 函数最大值与最小值

最大值与极大值等价的情形 如果函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$[a,b]$内可导，若函数$f(x)$在(a,b)内**有且仅有一个极大值，而无极小值**，**则此极大值即为最大值。**



最小值与极小值等价的情形 如果函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$[a,b]$内可导，若函数$f(x)$在(a,b)内**有且仅有一个极小值，而无极大值**，**则此极小值即为最小值。**



第三节 函数最大值与最小值

课本例5　某食品厂生产辣条，每包销售5元，当每周销量（单位：千包）为Q时，周总成本为$C(Q)=2400+4000Q+100Q^2$（元），设价格不变，求(1)可获得利润的销量范围；（2）每周销量为多少包时，可获得最大利润

解：　设每周生产Q千包时，总收益为$R(Q)$，总利润为$L(Q)$，则有

$$R(Q)=5\times 1000Q=5000Q$$

$$\begin{aligned}L(Q)&=R(Q)-C(Q)\\&=5000Q-\left(2400+4000Q+100Q^2\right)\\&=-100Q^2+1000Q-2400\end{aligned}$$

要获得利润，则$L(Q)>0$，即 $-100Q^2+1000Q-2400>0$

不等式左右两侧同时除-100 得到 $Q^2-10Q+24<0$

化简得 $(Q-4)(Q-6)<0$ 解得$4<Q<6$

故可以获得利润的销量范围为4000包到6000千包之间

第三节 函数最大值与最小值

课本例5 某食品厂生产辣条，每包销售5元，当每周销量（单位：千包）为Q时，周总成本为$C(Q)=2400+4000Q+100Q^2$（元），设价格不变，求(1)可获得利润的销量范围；（2）每周销量为多少包时，可获得最大利润

解： $L(Q)=-100Q^2+1000Q-2400$

求导数 $L'(Q)=-200Q+1000$

令导数$L'(Q)=0$，解得驻点$Q=5$，且没有不可导点。

求二阶导数$L''(Q)=-200$， $L''(5)=-200<0$，故$Q=5$为唯一极大值点，且无极小值点。

此时极大值$L(5)=100$即为$L(Q)$的最大值。

因此每周销量为5000包时，可获得最大利润