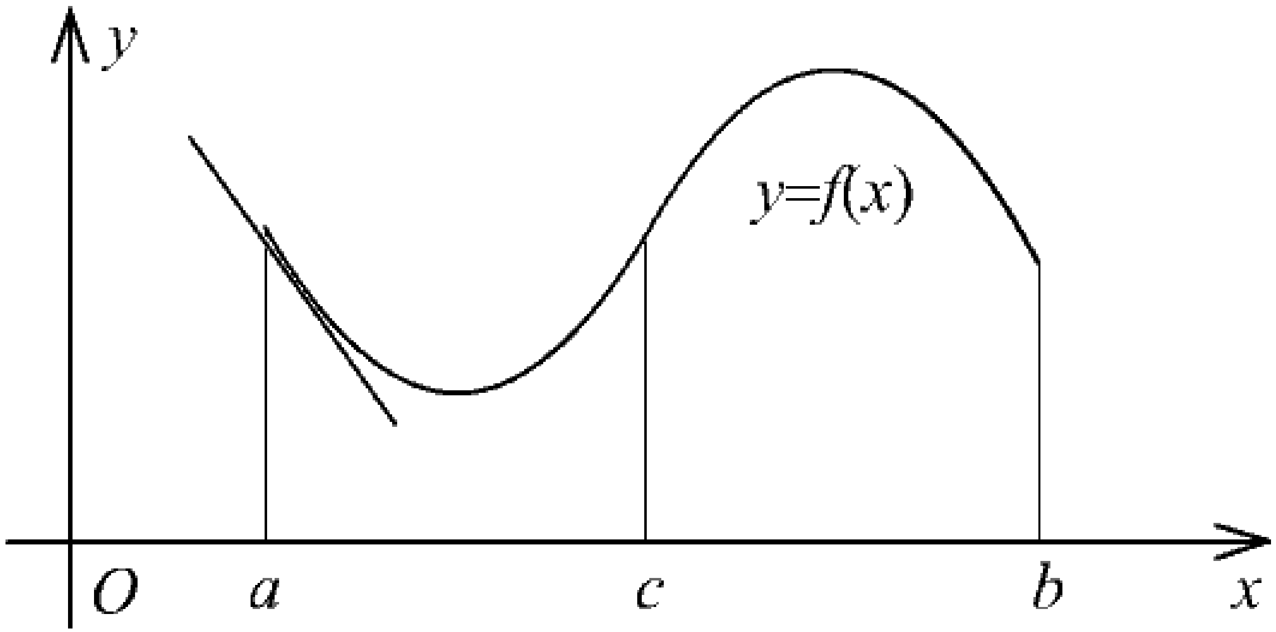
微积分I

3学分、外招

第四章 中值定理及导数的应用

数学系王伟文

第一节 曲线的凹向与拐点



- 观察上述函数曲线在区间(a,c)、(c,b)的凹向；

  函数曲线在区间(a,c)下凹，在区间(c,b)上凹

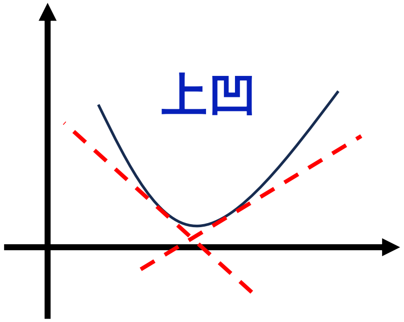
- 观察函数曲线的切线在区间(a,c)、(c,b)与曲线的位置关系

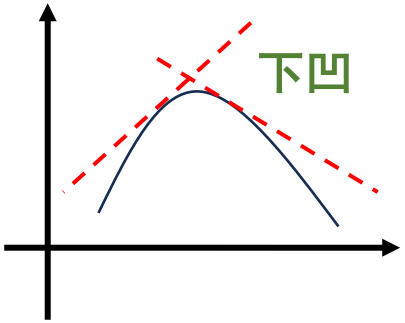
  在区间(a,c)上曲线的切线总是在曲线的下方，在区间(c,b)上曲线的切线总是在曲线的上方

第一节 曲线的凹向与拐点

曲线凹向定义

- 如果在某个区间内，函数曲线位于其任意一点切线的上方，则称曲线在此区间内是上凹的；
- 如果在某个区间内，函数曲线位于其任意一点切线的下方，则称曲线在此区间内是下凹的；





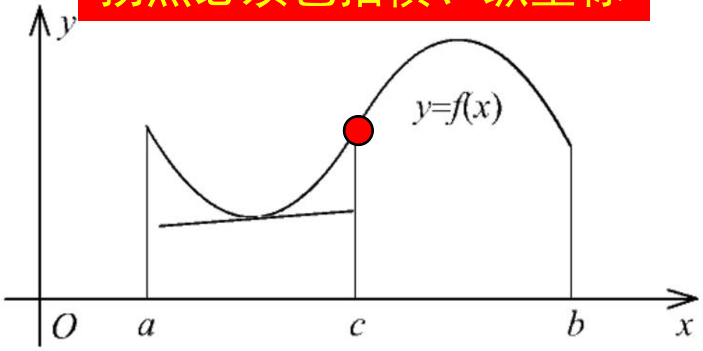
第一节 曲线的凹向与拐点

曲线凹向判定定理 设函数$f(x)$在区间(a,b)内具有二阶导数，则

- 如果当$x \in (a,b)$时，恒有$f''(x) > 0$，则曲线$y = f(x)$在(a,b)内上凹；
- **如果当$x \in (a,b)$时，恒有$f''(x) < 0$，则曲线$y = f(x)$在(a,b)内下凹。**

曲线上凹和下凹的分界点称为曲线的**拐点**

拐点必须包括横、纵坐标



- **在拐点适当小的左右邻域 $f''(x)$ 必然异号，因而在拐点处要么$f''(x) = 0$，要么$f''(x)$** 不存在

求拐点的步骤

求二阶导数$f''(x) = 0$及$f''(x)$不存在**的点** → 如果在该点的左右两侧二阶导数$f''(x)$**异号** → 该点则为函数的**拐点的横坐标**

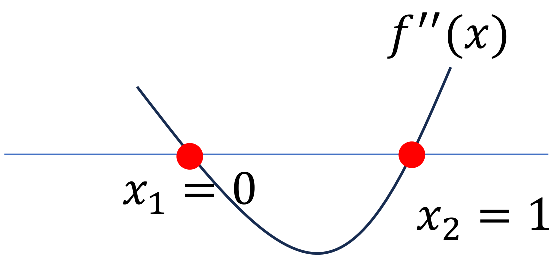
第一节 曲线的凹向与拐点

课本例1 求曲线$f(x)=x^4-2x^3+1$的凹向与拐点。

解： $f'(x)=4x^3-6x^2$

$f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

令$f''(x)=0$，解得$x_1=0$， $x_2=1$



没有二阶导数$f''(x)$不存在的点

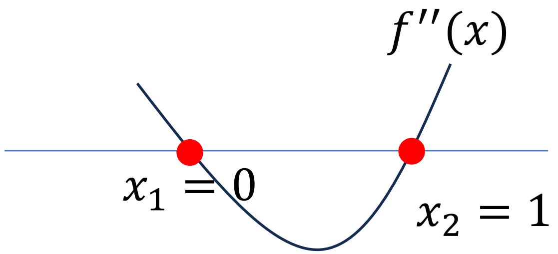
$x_1=0$和$x_2=1$将$(-\infty,+\infty)$划分为

$(-\infty,0)$， $(0,1)$， $(1,+\infty)$， 三个区间

我们通过判断二阶导数$f''(x)$在这3个区间上的符号确定拐点

第一节 曲线的凹向与拐点

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$$



制作表格

$\boldsymbol{x}$	$(-\infty, 0)$	$\mathbf{0}$	$(0, \mathbf{1})$	$\mathbf{1}$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	> 0	0	< 0	0	> 0
$f(x)$	上凹	拐点 $f(0) = 1$	下凹	拐点 $f(1) = 0$	上凹

由表格可知，$f(x)$在区间$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$上凹，在$(0, \mathbf{1})$下凹，**拐点为(0, 1)和（1, 0）**

第一节 曲线的凹向与拐点

课本例2 求曲线$f(x)=(x-2)^{\frac{5}{3}}$的凹向与拐点。

解：

$$f'(x)=\frac{5}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}}$$

$$f''(x)=\frac{10}{9}(x-2)^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$$

当$x=2$时，$f''(x)$不存在。

$x=2$将$(-\infty,+\infty)$划分为两个区间

$(-\infty,2)$　　　　$(2,+\infty)$

我们通过判断二阶导数$f''(x)$在这两个区间上的符号确定拐点

第一节 曲线的凹向与拐点

课本例2 求曲线$f(x)=(x-2)^{\frac{5}{3}}$的凹向与拐点。

解：

$$f''(x)=\frac{10}{9}(x-2)^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$$

制作表格

$\boldsymbol{x}$	$(-\infty,2)$	**2**	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	<0	不存在	>0
$f(x)$	下凹	拐点 $f(2)=0$	上凹

由表格可知，$f(x)$在区间$(-\infty,2\ )$下凹，在$(2,+\infty)$上凹，**拐点为(2, 0)。**

第二节 函数图像的作法

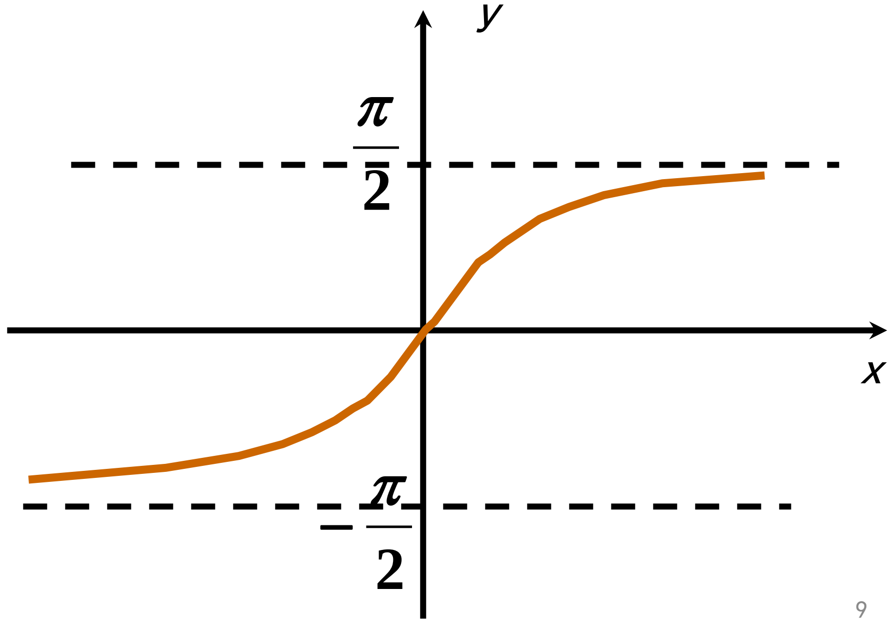
水平渐近线(平行于x轴)如果$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$或$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，这里$A$是常数，则称$y=A$是函数$f(x)$的一条水平渐近线

例如$f(x)=\arctan x$

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

故$f(x)=\arctan x$有两条水平渐近线$y=\frac{\pi}{2}$及$y=-\frac{\pi}{2}$



第二节 函数图像的作法

水平渐近线（平行于x轴） 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$，这里$A$是常数，则称$y = A$是函数$f(x)$的一条水平渐近线

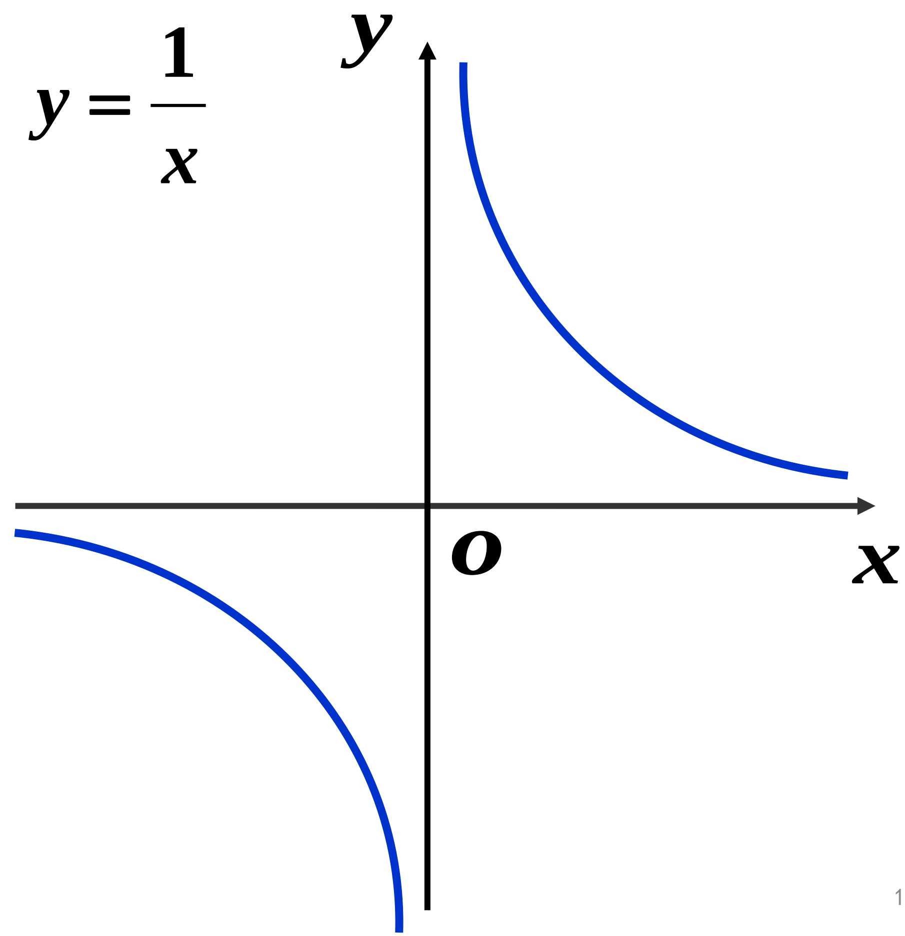
例如$f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

故$f(x) = \frac{1}{x}$有 一条水平渐近线

$y = 0$



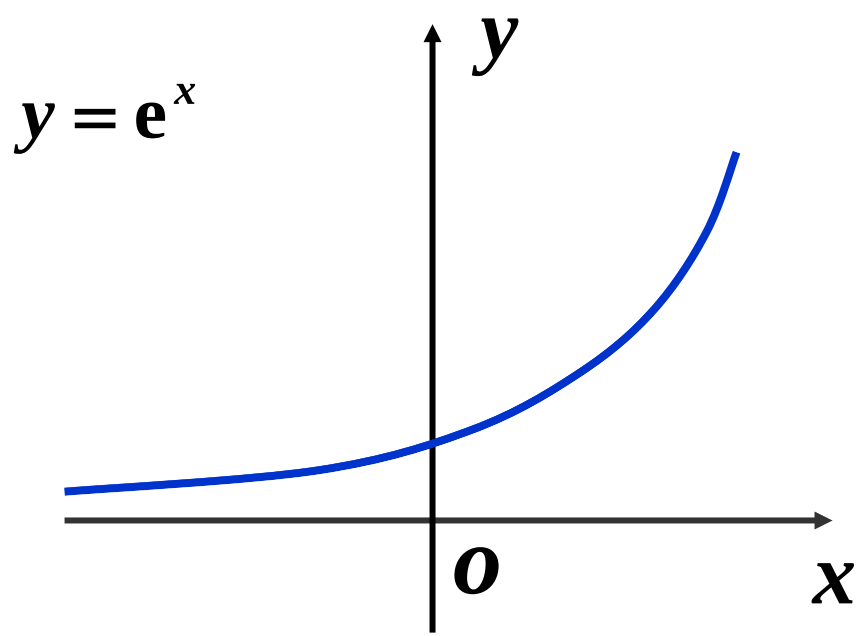
第二节 函数图像的作法

水平渐近线（平行于x轴） 如果$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$或$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，这里$A$是常数，则称$y=A$是函数$f(x)$的一条水平渐近线

例如$f(x)=e^x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

故$f(x)=e^x$有 一条水平渐近线$y=0$



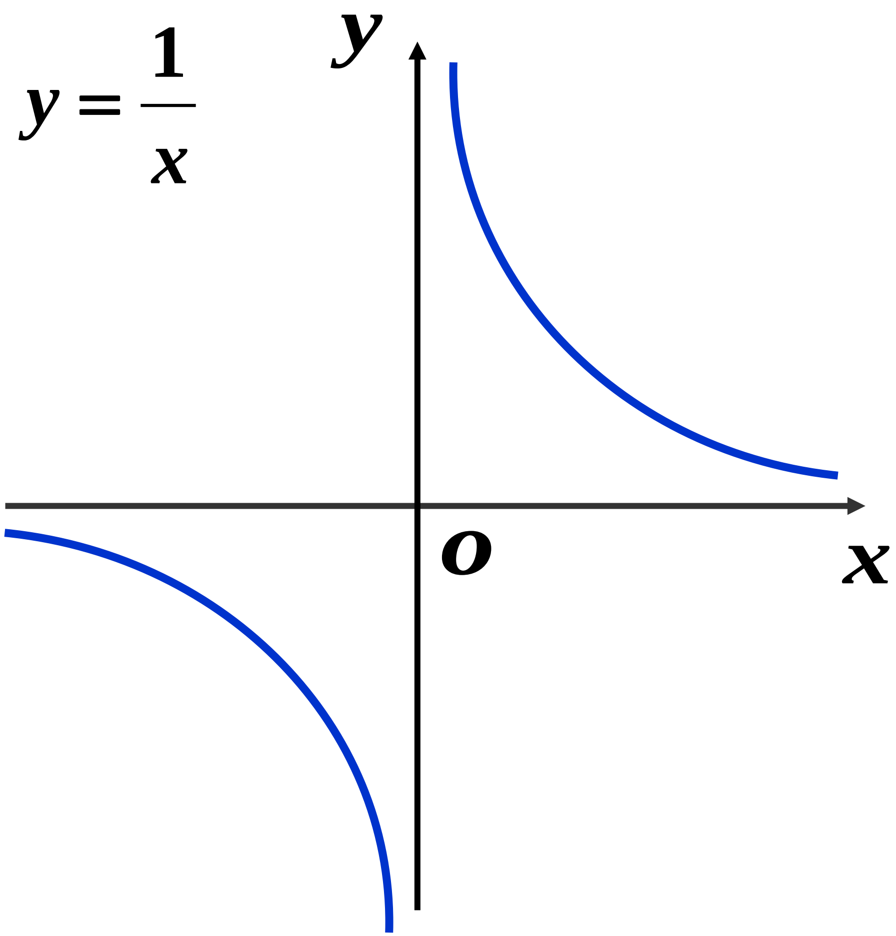
第二节 函数图像的作法

铅垂（垂直）渐近线（垂直于x轴） 如果 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$或 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$，则称$x=a$是函数$f(x)$的一条铅垂渐近线（或称垂直渐近线）

例如$f(x)=\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

故$f(x)=\frac{1}{x}$有 一条铅垂渐近线$x=0$



第二节 函数图像的作法

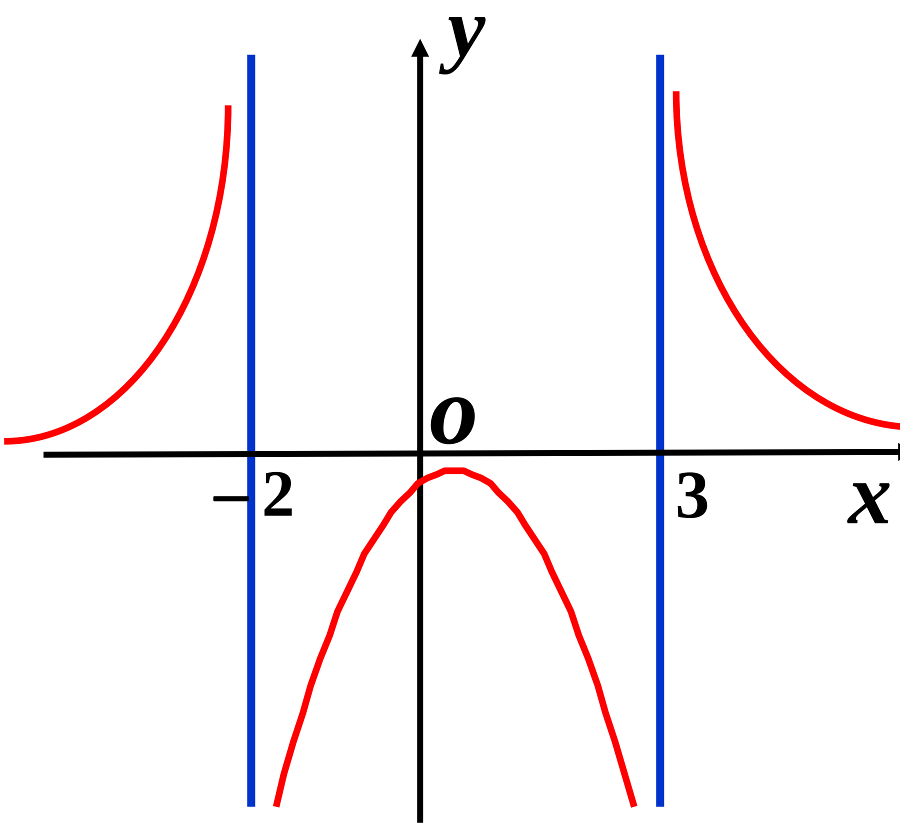
铅垂（垂直）渐近线（垂直于x轴） 如果$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$，则称$x=a$是函数$f(x)$的一条铅垂渐近线（或称垂直渐近线）

例如$f(x)=\frac{1}{(x+2)(x-3)}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{1}{(x+2)(x-3)}=\infty$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+2)(x-3)}=\infty$$

故$f(x)=\frac{1}{(x+2)(x-3)}$有两条铅垂渐近线$x=-2$、 $x=3$



第二节 函数图像的作法

例 求曲线$f(x)=\frac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$的铅垂渐近线

解：

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-2)(x+3)}{x-1}=\infty$$

故$x=1$为$f(x)$的铅垂渐近线

第二节 函数图像的作法

例 求曲线$f(x)=\frac{1}{x-1}$的水平渐近线

解：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$$

故$y=0$为$f(x)$的水平渐近线

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

边际函数 设可导函数$y=f(x)$是一个经济函数(成本、需求、收益等)，则其**导函数$f'(x)$称为边际函数，**如边际成本、边际收益、边际需求等。

函数$f(x)$在点$x=x_0$处有一个改变量Δx，则相应的函数改变量为

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot\Delta x$$

若$\Delta x=1$，则$\Delta y \approx f'(x_0)$

这说明$f(x)$在点$x=x_0$处，当x产生一个单位的改变时，$f(x)$**近似改变**$f'(x_0)$个单位。经济学家在应用时常忽略“近似”，而直接说$f'(x_0)$个单位，这就是边际函数值的含义。

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

边际函数 设可导函数$y = f(x)$是一个经济函数(成本、需求、收益等)，则其**导函数$f'(x)$称为边际函数，**如边际成本、边际收益、边际需求等。

- **设某产品成本函数$C = C(Q)$（C为总成本，Q为产量），其变化率（导数）$C' = C'(Q)$称为边际成本。**
- **$C'(Q_0)$称为当产量为Q_0时的边际成本。**
- **经济学上可以解释为：当产量达到Q_0时，增加一个单位的产量所增加的成本为$C'(Q_0)$。**

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

例 生产某产品x单位的总成本为$C(x) = 1100 + 0.002x^2$（百元），则生产1000单位时的边际成本为？

解： 边际成本函数为

$$C'(x) = 0.004x$$

生产1000单位时的边际成本为

$$C'(1000) = 0.004 \times 1000 = 4(\text{百元})$$

这表示当产量$x = 1000$时，每**增加一个单位产量**，**大约需要增加成本400元**

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

例 某商品的需求函数为$Q(P) = 75 - P^2$，求当$P = 4$时的边际需求

解： 边际需求函数为

$$Q'(P) = -2P$$

当$P = 4$时的边际需求为

$$Q'(4) = -2 \times 4 = -8$$

这表示当$P = 4$时，每**增加一个单位价格**，需求**大约减少8个单位。**

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

设C为总成本，C_1为固定成本，C_2为可变成本，$\bar{C}$为平均成本，C'为边际成本，Q为产量，则有

- **总成本函数：$C = C(Q) = C_1 + C_2(Q)$**
- **平均成本函数：$\overline{C} = \overline{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{C_1}{Q} + \frac{C_2(Q)}{Q}$**
- **边际成本函数：$C' = C'(Q)$**

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

课本例3、4 某商品的成本函数为$C=C(Q)=100+\frac{Q^2}{4}$，（1）求当$Q=10$时的总成本、平均成本及边际成本；(2) 当产量Q为多少时，平均成本最小？

解： （1） 平均成本函数$\bar{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{100}{Q}+\frac{Q}{4}$

边际成本函数$C'(Q)=\frac{Q}{2}$

当$Q=10$时

总成本$C(10)=125$

平均成本$\bar{C}(10)=\frac{100}{10}+\frac{10}{4}=10+2.5=12.5$

边际成本$C'(10)=\frac{10}{2}=5$

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

课本例3、4 某商品的成本函数为 $C=C(Q)=100+\frac{Q^2}{4}$（$Q>0$），（1）求当$Q=10$时的总成本、平均成本及边际成本；(2) 当产量Q为多少时，平均成本最小？

解： (2) 平均成本函数$\bar{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{100}{Q}+\frac{Q}{4}$

$$\bar{C}'(Q)=-\frac{100}{Q^2}+\frac{1}{4} \qquad \bar{C}''(Q)=\frac{200}{Q^3}$$

令$\bar{C}'(Q)=0$，即 $-\frac{100}{Q^2}+\frac{1}{4}=0$

解得$Q=20$，无不可导点 且$\bar{C}''(20)=\frac{1}{40}>0$

故当$Q=20$时，$\bar{C}(10)=10$为函数$\bar{C}(Q)$的唯一极小值，且无极大值，因此$\bar{C}(10)$为函数$\bar{C}(Q)$在区间（0，$+\infty$）上的最小值。

即产量$Q=20$时，平均成本最小。

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

设P为商品价格，Q为商品数量，R为总收益，$\bar{R}$为平均收益，R'为边际收益，则有

- **需求（价格）函数：** $P = P(Q)$
- **总收益函数：** $R = R(Q) = Q \cdot P(Q)$
- **平均收益函数：** $\bar{R} = \frac{R(Q)}{Q} = P(Q)$
- **边际收益函数：** $R' = R'(Q)$
- **利润函数：** $L = L(Q) = R(Q) - C(Q)$

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

课本例6 设某产品产量为$Q(Q>0)$，其需求函数为$P(Q)=10-\frac{Q}{5}$，成本函数为$C(Q)=50+2Q$，则产量为多少时利润L最大?

解： 总收益函数为 $R(Q)=Q\cdot P(Q)=10Q-\dfrac{Q^2}{5}$

利润函数为 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=10Q-\dfrac{Q^2}{5}-50-2Q$

$$=8Q-\frac{Q^2}{5}-50$$

$L'(Q)=8-\dfrac{2}{5}Q$ $\qquad L''(Q)=-\dfrac{2}{5}$

令$L'(Q)=8-\frac{2}{5}Q=0$，解得驻点为$Q=20$，又因为$L''(20)=-\frac{2}{5}<0$

且无不可导点。故 $Q=20$ 时， $L(20)$ 为唯一极大值点，且无极小值，

即$L(20)$为最大值。产量$Q=20$时，利润最大。

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

课本例6 设某产品产量为$Q(Q>0)$，其需求函数为$P(Q)=10-\frac{Q}{5}$，成本函数为$C(Q)=50+2Q$，则产量为多少时利润L最大?

利润函数：$L(Q)=R(Q)-C(Q)$

$$L'(Q)=R'(Q)-C'(Q)$$

利润L最大时 $L'(Q)=R'(Q)-C'(Q)=0$

即$R'(Q)=C'(Q)$：边际收益等于边际成本

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

- 自变量改变量：$\Delta x = x - x_0$
- 函数值改变量： $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
- 自变量相对改变量： $\dfrac{\Delta x}{x_0} = \dfrac{x - x_0}{x_0}$
- 函数值的相对改变量： $\dfrac{\Delta y}{y_0} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)}$

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

弹性 设函数$y=f(x)$在点$x=x_0$处可导，函数的相对改变量$\frac{\Delta y}{y_0}$与自变量的相对改变量$\frac{\Delta x}{x_0}$之比$\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$，称为函数$f(x)$从$x=x_0$到$x=x_0+\Delta x$两点间的相对变化率，或称为两点间的弹性。极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$$

称为**函数$f(x)$在$x=x_0$处的相当变化率或弹性**，记作

$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0} \quad \text{或} \quad \frac{E}{Ex}f(x_0)$$

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

函数$f(x)$在$x = x_0$处弹性

$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y_0}{\Delta x / x_0}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

$$= f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

对于一般x, 若$f(x)$可导，则

$$\boxed{\frac{Ey}{Ex} = f'(x)\frac{x}{y} = f'(x)\frac{x}{f(x)}}$$

称为函数$f(x)$的弹性函数

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

函数$f(x)$在$x = x_0$处弹性

$\frac{E}{Ex}f(x_0)$（或$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$）表示在点$x = x_0$处，当自变量产生1%的改变时，函数值$f(x)$近似改变$\frac{E}{Ex}f(x_0)\%$

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

课本例9 求函数$f(x) = 100e^{3x}$的弹性函数$\frac{Ey}{Ex}$及函数在点$x = 2$的弹性。

解：$f'(x) = 300e^{3x}$

弹性函数 $$\frac{Ey}{Ex} = f'(x)\frac{x}{f(x)} = 300e^{3x} \cdot \frac{x}{100e^{3x}} = 3x$$

函数在点$x = 2$的弹性为 $$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=2} = 3 \cdot 2 = 6$$

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

- 设某商品价格为$P(P \geq 0)$，需求量为$Q(Q \geq 0)$，则函数

$$Q = f(P)\text{（价格}P\text{为自变量，需要量}Q\text{为因变量）}$$

称为需求函数

- 称函数$\eta(P) = \left| f'(P)\frac{P}{f(P)} \right|$为需求弹性函数

- $\eta(P_0) = \left| f'(P_0)\frac{P_0}{f(P_0)} \right|$为该商品在$P = P_0$处的需求弹性

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

课本例13 设某商品的需求函数为$Q(P)=e^{-\frac{P}{5}}$，求需求弹性函数及$P=3$时的需求弹性。

解： $Q'(P)=-\frac{1}{5}\ e^{-\frac{P}{5}}$

需求弹性函数 $\eta(P)=\left|Q'(P)\dfrac{P}{Q(P)}\right| = \left|-\frac{1}{5}\ e^{-\frac{P}{5}}\dfrac{\boldsymbol{P}}{e^{-\frac{P}{5}}}\right|$

$$= |-\frac{1}{5}P| = \frac{P}{5}$$

$P=3$时的需求弹性

$$\eta(3)=\frac{3}{5}=0.6$$

这表示当价格$P=3$时，价格**上涨1%时**，需求**减少0.6%** $(Q'(P)<0)$