微积分I

3学分、外招

数学系王伟文

第六节　函数的几种简单性质

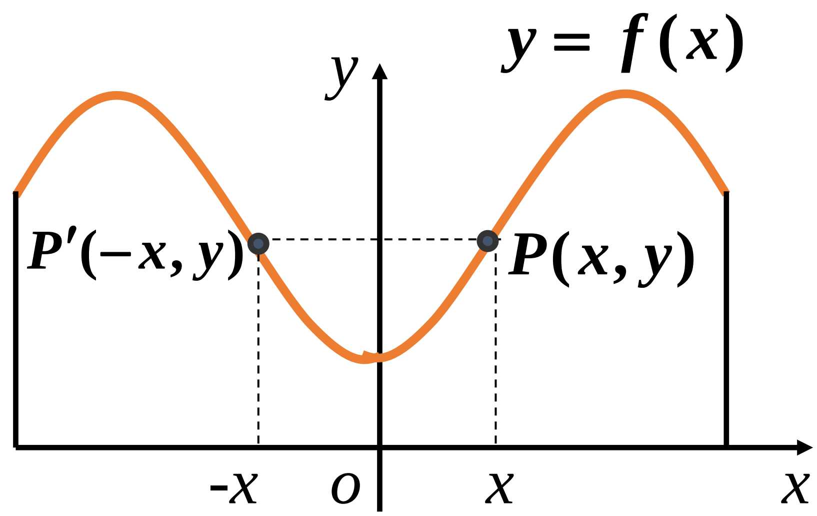
（一）函数的奇偶性

偶函数 **设D关于原点对称**，对于任意$x \in D$，有

$$f(-x) = f(x),$$

则称$f(x)$为偶函数

- 偶函数的图形关于y轴对称



偶函数

第六节　函数的几种简单性质

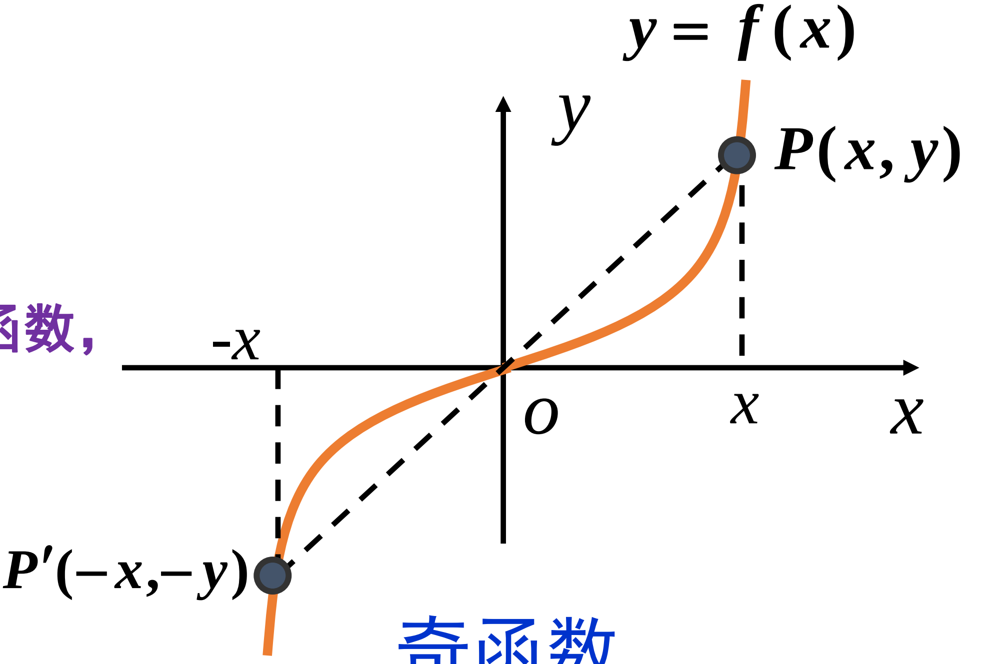
（一）函数的奇偶性

奇函数　**设D关于原点对称**，对于任意$x \in D$，有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称$f(x)$为奇函数

- 奇函数的图形关于原点对称
- 若奇函数在$x = 0$处有定义，则 $f(0) = 0$，即奇函数过原点
- 既不是偶函数也不是奇函数的函数，可简称非奇非偶函数



奇函数

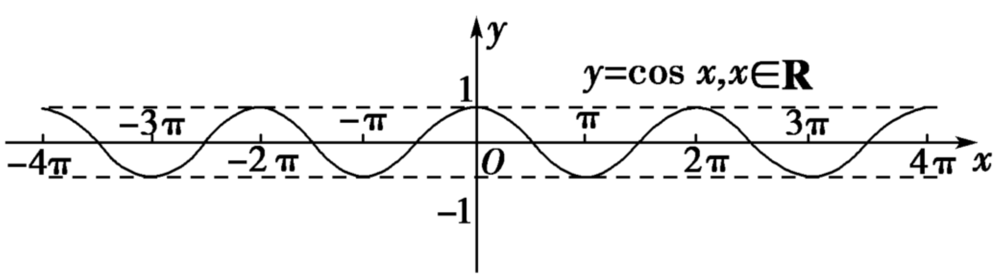
第六节　函数的几种简单性质

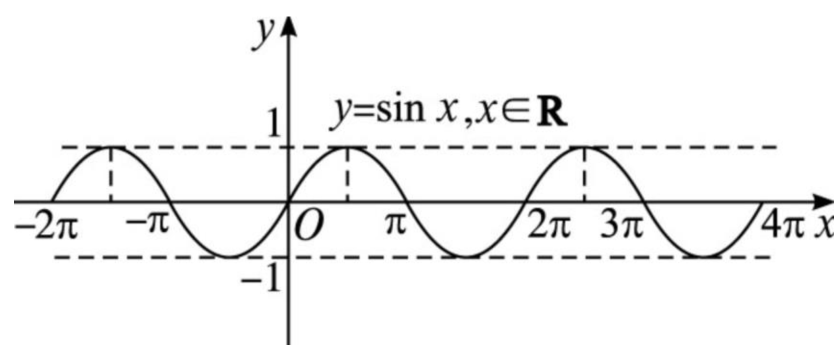
（二）函数的周期性

周期函数　设D为函数$f(x)$的定义域，若存在正常数T，对于任意$x \in D$，有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称$f(x)$为周期函数，T称为函数的周期，满足上式的最小的T值称为最小正周期





第六节　函数的几种简单性质

（三）函数的单调性

单调增加　设函数$f(x)$的在区间(a,b)上有定义，若对于任意$x_1,x_2\in(a,b)$，

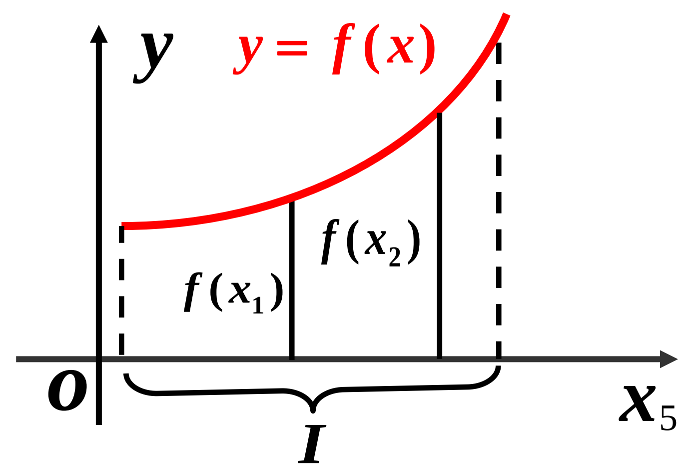
$$当x_1<x_2时，总有f(x_1)<f(x_2),$$

则称$f(x)$**在区间(a,b)上是单调增加**的.

$$当x_1<x_2时，总有f(x_1)\le f(x_2),$$

则称$f(x)$**在区间(a,b)上是单调不减**的.

- **若函数在整个定义域上是单调增加或单调不减的，则该函数可称为单调增加或单调不减函数**



第六节　函数的几种简单性质

（三）函数的单调性

单调减少　设函数$f(x)$的在区间(a,b)上有定义，若对于任意$x_1, x_2 \in (a,b)$,

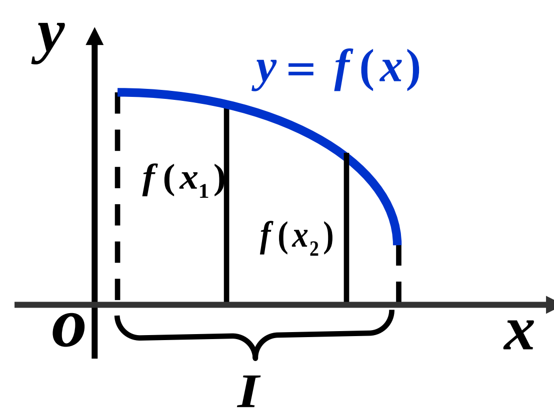
$$\text{当}x_1 < x_2\text{时，总有}f(x_1) > f(x_2),$$

则称$f(x)$在区间(a,b)上是单调减少的.

$$\text{当}x_1 < x_2\text{时，总有}f(x_1) \geq f(x_2),$$

则称$f(x)$在区间(a,b)上是单调不增的.

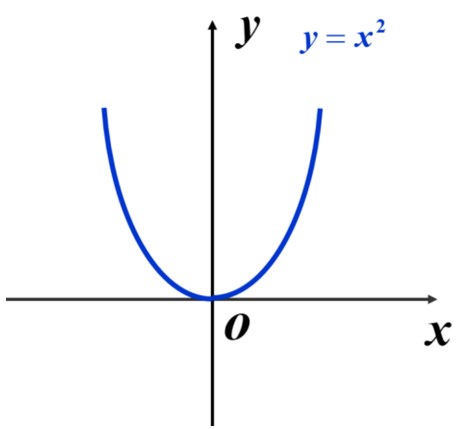
- 若函数在整个定义域上是单调减少或单调不增的，则该函数可称为单调减少或单调不增函数

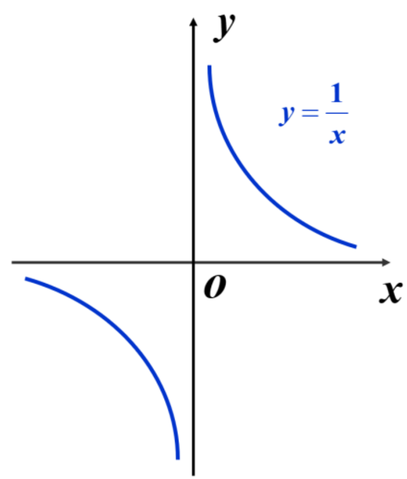


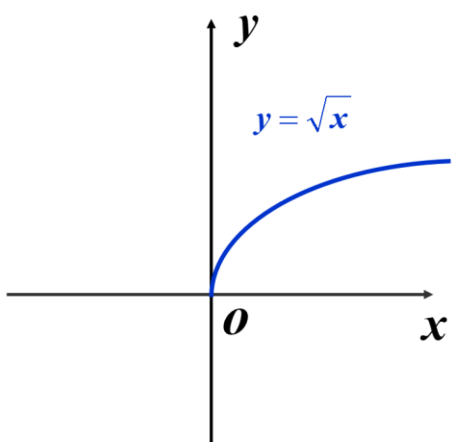
第六节 函数的几种简单性质

（三）函数的单调性

能不能给出一些关于函数单调性的例子？







第六节　函数的几种简单性质

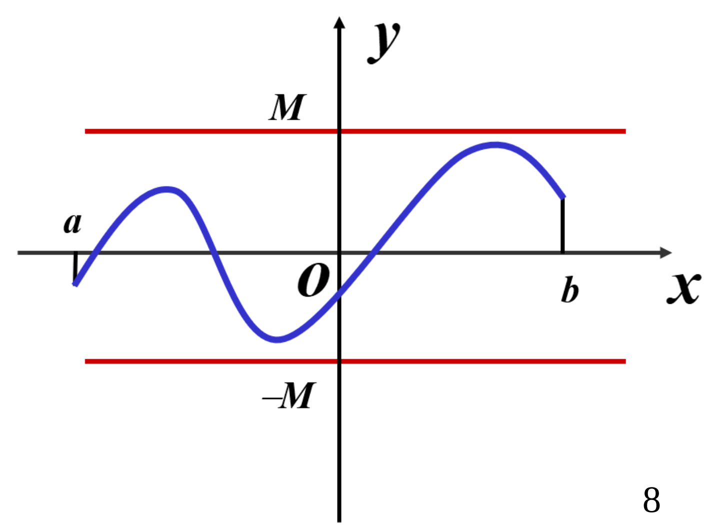
（四）函数的有界性

有界函数　设函数$f(x)$的在区间(a,b)上有定义，若存在一个正数M，对于任意 $x \in (a,b)$，

$$|f(x)| \le M$$

则称$f(x)$**在**(a,b)**内有界**，如果不存在这样的M，则称$f(x)$**在**(a,b)**内无界**

- 若函数在整个定义域上有界，则该函数可称为有界函数



第七节　反函数与复合函数

（一）反函数

- UP主收入　　　视频播放量
- BMI指数　　　体重
- 超市利润　　　成本

函数关系

因变量　　　自变量

反函数

能不能保证任何函数一定可以找到它的反函数？

第七节　反函数与复合函数

（一）反函数

反函数 设$y=f(x)$是定义在$D(f)$上的一个函数，值域为$Z(f)$，如果对每一个$y\in Z(f)$有一个确定且满足$y=f(x)$的$x\in D(f)$与之对应，其对应规则记作f^{-1}，称$x=f^{-1}(y)$为函数$y=f(x)$的**反函数**，其**定义域为$Z(f)$**

- **函数$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$也是一个函数，所以需要满足，存在唯一的x与y对应**

$$x \underset{x=f^{-1}(y)}{\overset{y=f(x)}{\rightleftarrows}} y$$

互为唯一，即一一对应关系

第七节　反函数与复合函数

（一）反函数

例1　求$y = 3x - 2$的反函数

第七节　反函数与复合函数

（一）反函数

例1　求$y=3x-2$的反函数

解　由$y=3x-2$，知

$$x=\frac{y+2}{3}$$

故原函数的反函数为

$$x=\frac{y+2}{3}$$

或可表示为

$$y=\frac{x+2}{3}$$

第七节　反函数与复合函数

(一) 复合函数

$$y = \log_{10}(x^2 + 1)$$

$$y = e^{\sin x}$$

$$y = (x + 1)^2$$

一个复杂的函数是不是可以拆分成好几个简单函数依次计算?

任意的简单函数都能通过依次计算得到一个复杂的函数吗?

$$y = \log_{10}(-(x^2 + 1))$$

对数内真数小于0，不合法!!!

第七节　反函数与复合函数

(一) 复合函数

复合函数 设函数$y = f(u)$的定义域为$D(f)$，函数$u = \varphi(x)$的值域为$Z(\varphi)$，若$\boldsymbol{Z(\varphi) \cap D(f) \neq \emptyset}$，则称$y = f[\varphi(x)]$为**复合函数**。

$$\boldsymbol{y = \log_{10}(x^2+1) = f[\varphi(x)]},\quad \boldsymbol{y = \log_{10} u},\quad \boldsymbol{u = x^2+1}$$

(一) 复合函数

例2 已知$y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=a-x^2$。分别考察当$a=1$，$a=-1$时，$y=f[\varphi(x)]$是不是复合函数。

解

当$a=1$时，$y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$

$$D(f)=[0,+\infty),\qquad Z(\varphi)=(-\infty,1],\qquad \boldsymbol{Z(\varphi)\cap D(f)\neq\emptyset}$$

$y=f[\varphi(x)]$是复合函数，此时$y=\sqrt{u}=\sqrt{1-x^2}$。

$$1-x^2\geq 0,\quad x^2\leq 1\text{，即}-1\leq x\leq 1$$

因此复合函数$y=f[\varphi(x)]$的定义域为$[-1,1]$

第七节　反函数与复合函数

(一) 复合函数

例2　已知$y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=a-x^2$。分别考察当$a=1$，$a=-1$时，$y=f[\varphi(x)]$是不是复合函数。

解

当$a=-1$时，$y=\sqrt{u}$，$u=-1-x^2$

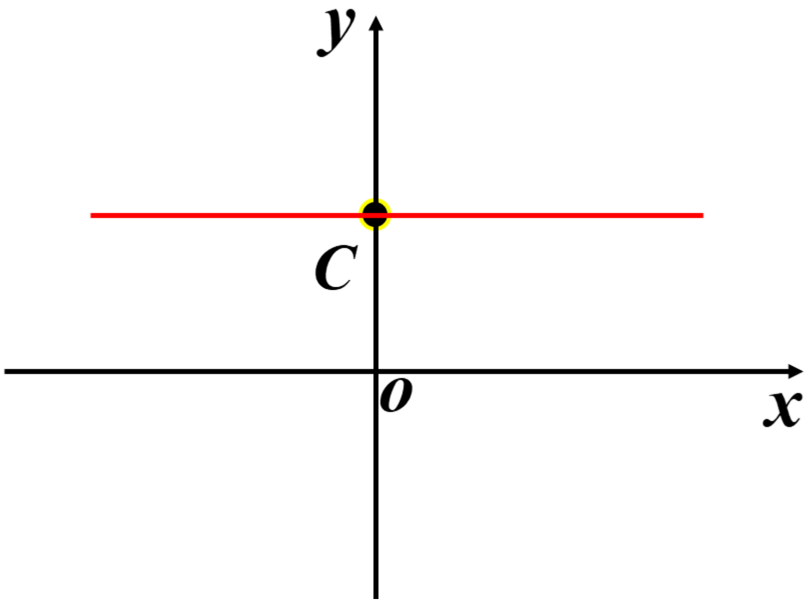
$$D(f)=[0,+\infty),\qquad Z(\varphi)=(-\infty,-1],\qquad \boldsymbol{Z(\varphi)\cap D(f)=\emptyset}$$

$y=f[\varphi(x)]$不是复合函数。

第八节 初等函数

基本初等函数

常数函数 $y = C$（C是常数），其定义域为$(-\infty, +\infty)$



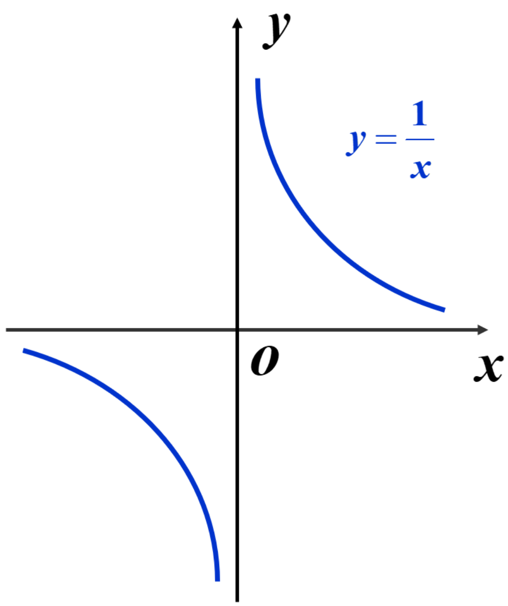
第八节 初等函数

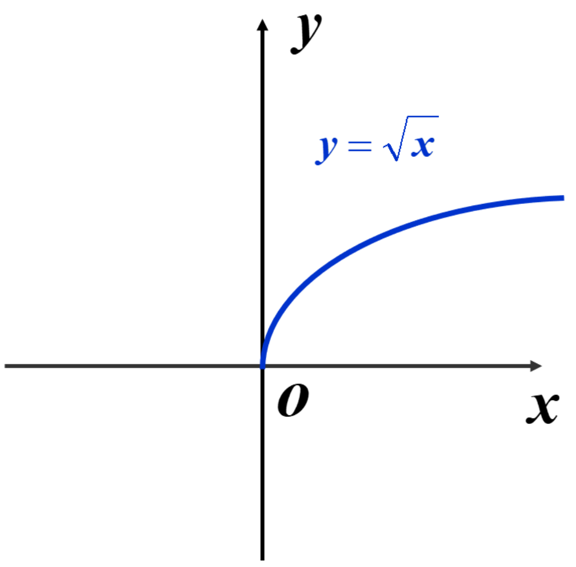
基本初等函数

幂函数 $y=x^a$ (a为实数)，其定义域由a的取值确定。

$a=-1$，$y=x^{-1}=\frac{1}{x}$，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$a=\frac{1}{2}$，$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$，定义域为$[0,+\infty)$



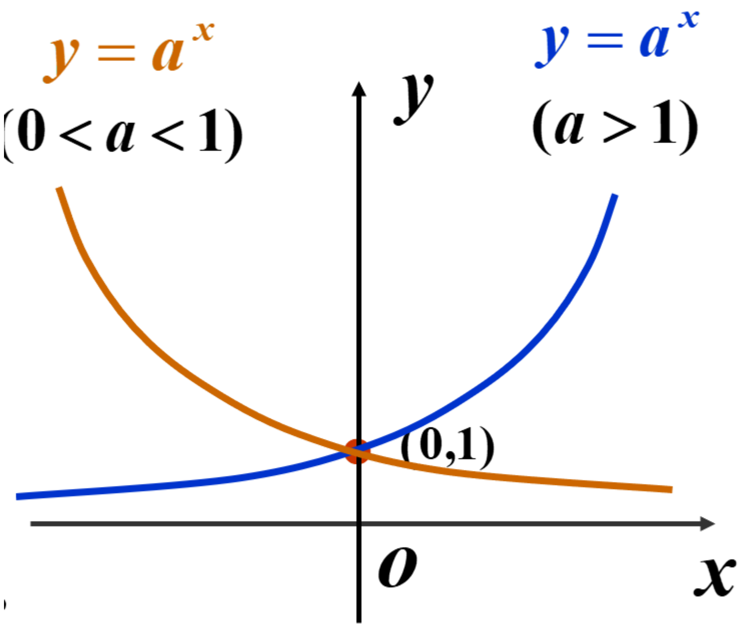


第八节 初等函数

基本初等函数

指数函数 $y = a^x\,(a > 0$且$a \neq 1)$，其定义域为$(-\infty, +\infty)$

- 无论a取何值，都通过点$(0, 1)$，且y总大于0
- 当$a > 1$时，函数单调递增
- 当$0 < a < 1$时，函数单调递减

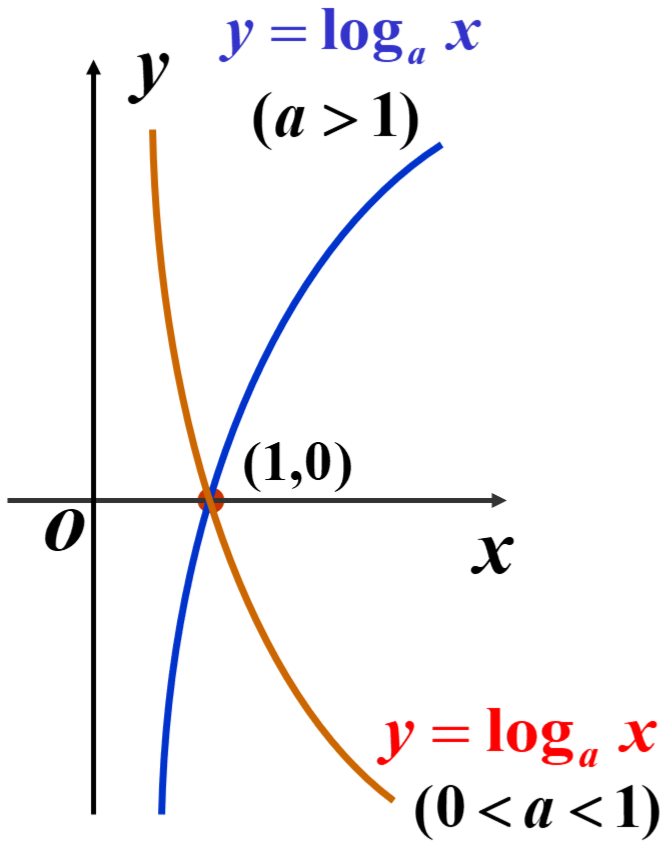


第八节 初等函数

基本初等函数

对数函数 $y = \log_a x$（$a > 0$且$a \neq 1$），其定义域为$(0, +\infty)$

- 无论a取何值，都通过点$(1, 0)$
- 当$a > 1$时，函数单调递增
- 当$0 < a < 1$时，函数单调递减
- 与指数函数互为反函数$x = a^y$



第八节 初等函数

基本初等函数

三角函数

$$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$$

$$y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$$

- $y=\cos x$是偶函数
- $y=\sin x, y=\tan x$是奇函数
- $y=\sin x, y=\cos x$是以2π为周期的函数，$y=\tan x$是以π为周期的函数
- $|\sin x|\le 1$， $|\cos x|\le 1$均为有界函数

第八节 初等函数

基本初等函数

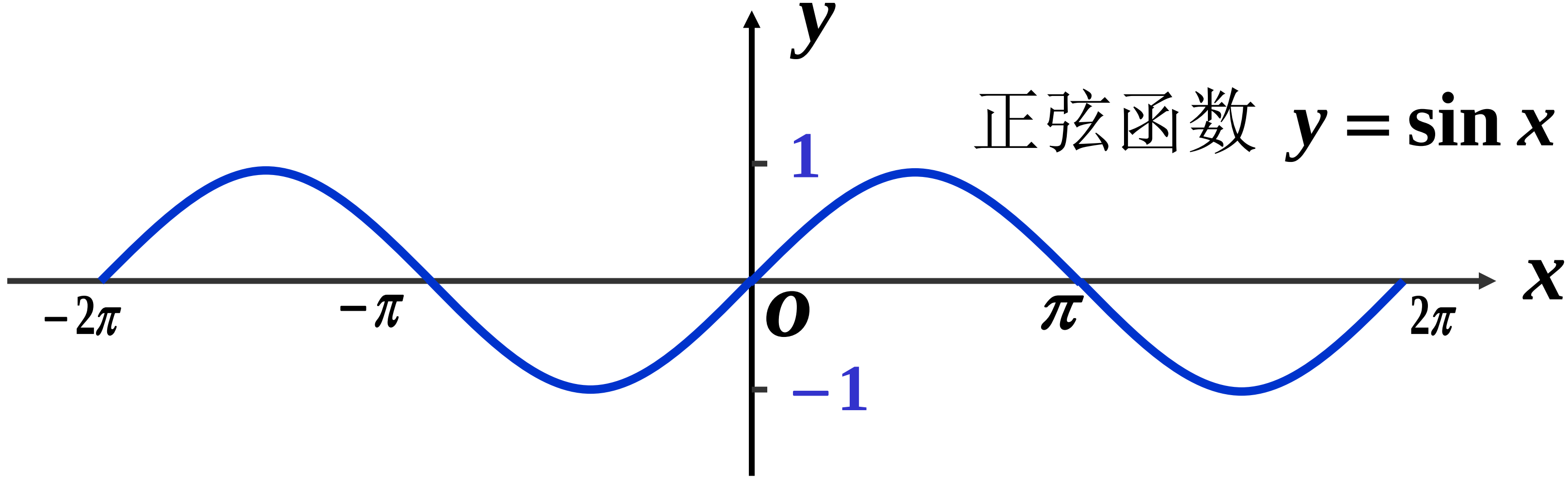
反三角函数

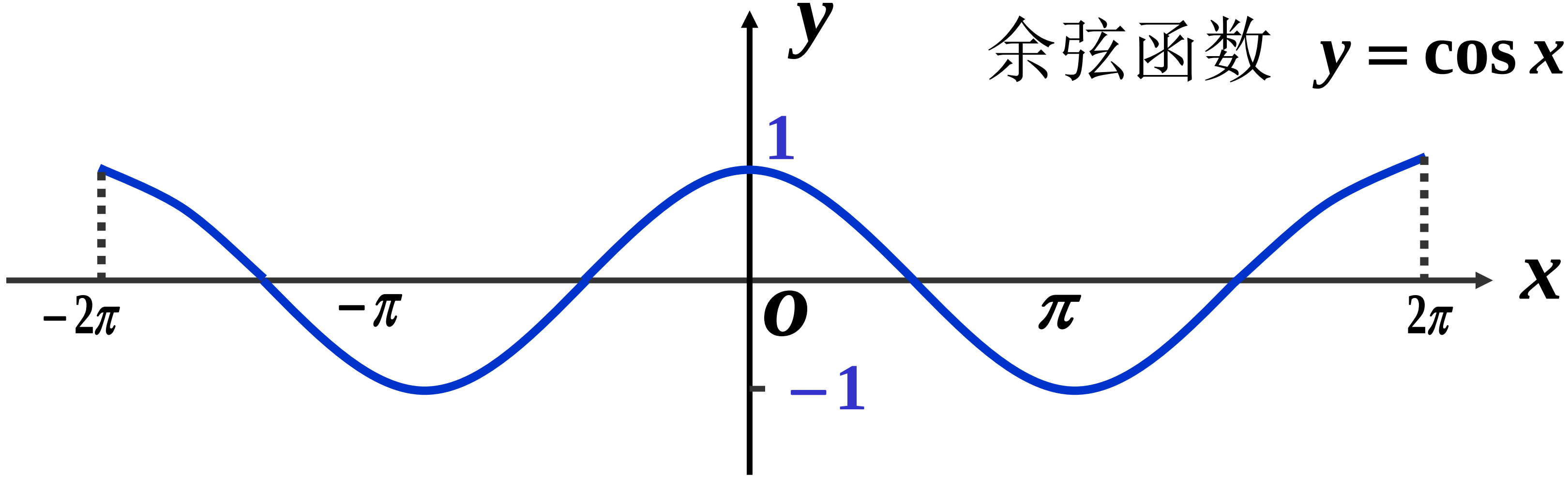
$$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$$

$$y=\operatorname{arccot} x, y=\operatorname{arcsec} x, y=\operatorname{arccsc} x$$

- $y=\arcsin x, x\in[-1,1], y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
- $y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$
- $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

分别对应$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$的反函数

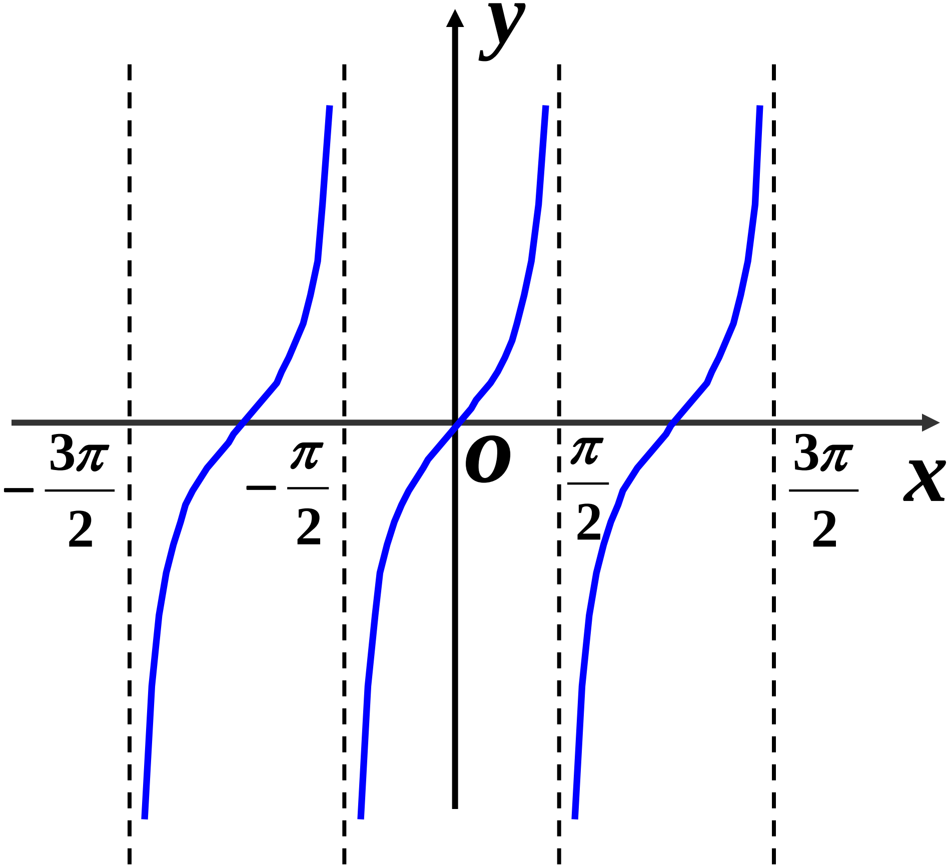

y
正弦函数 $y = \sin x$
1
x
-2π
$-\pi$
O
π
2π
-1


y
余弦函数 $y = \cos x$
1
x
-2π
$-\pi$
O
π
2π
-1

正切函数 $\boldsymbol{y = \tan x}$

定义域: $x \neq (2n+1)\pi/2$ 。

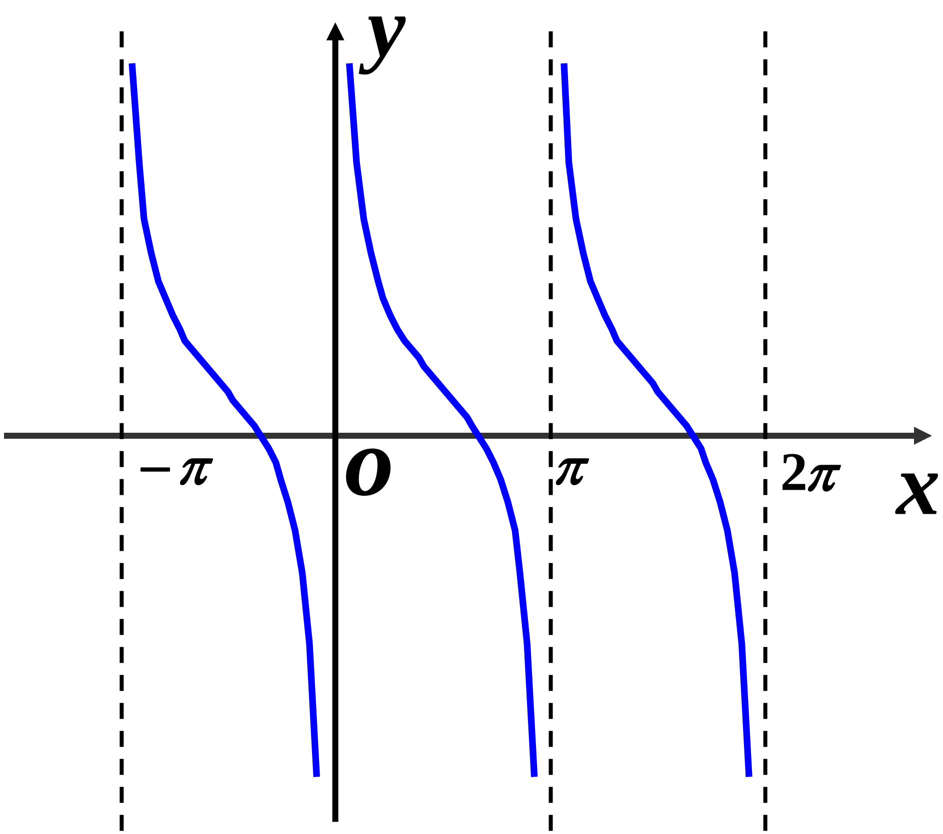
周期: π 。奇函数。



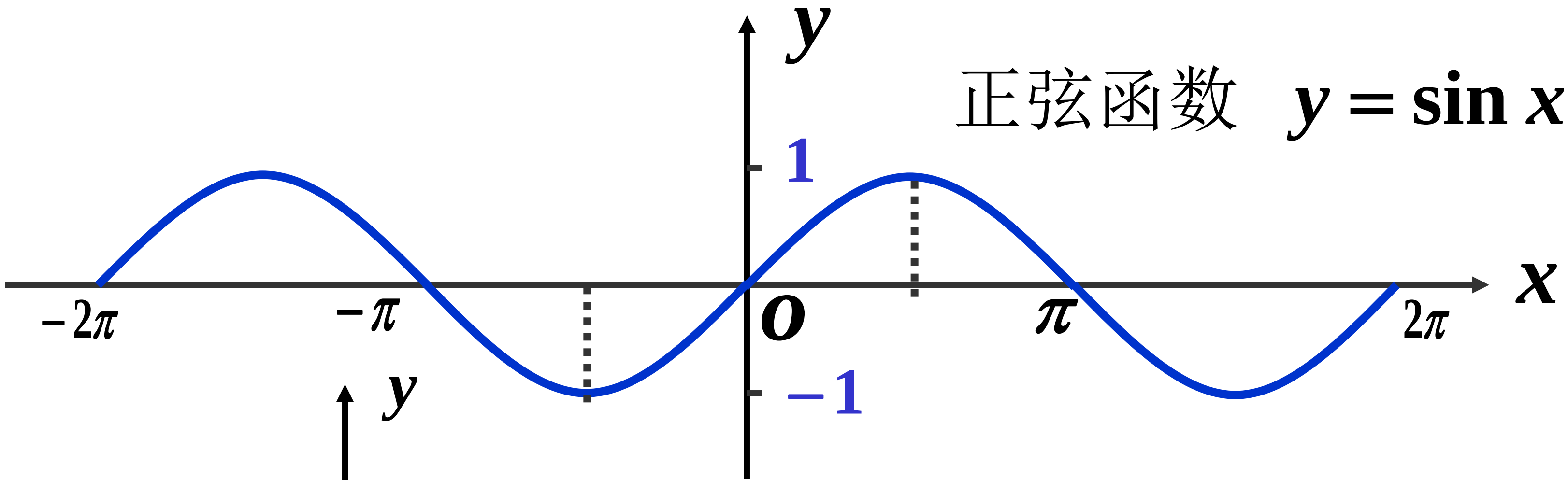
余切函数 $\boldsymbol{y = \cot x}$

定义域: $x \neq n\pi$。

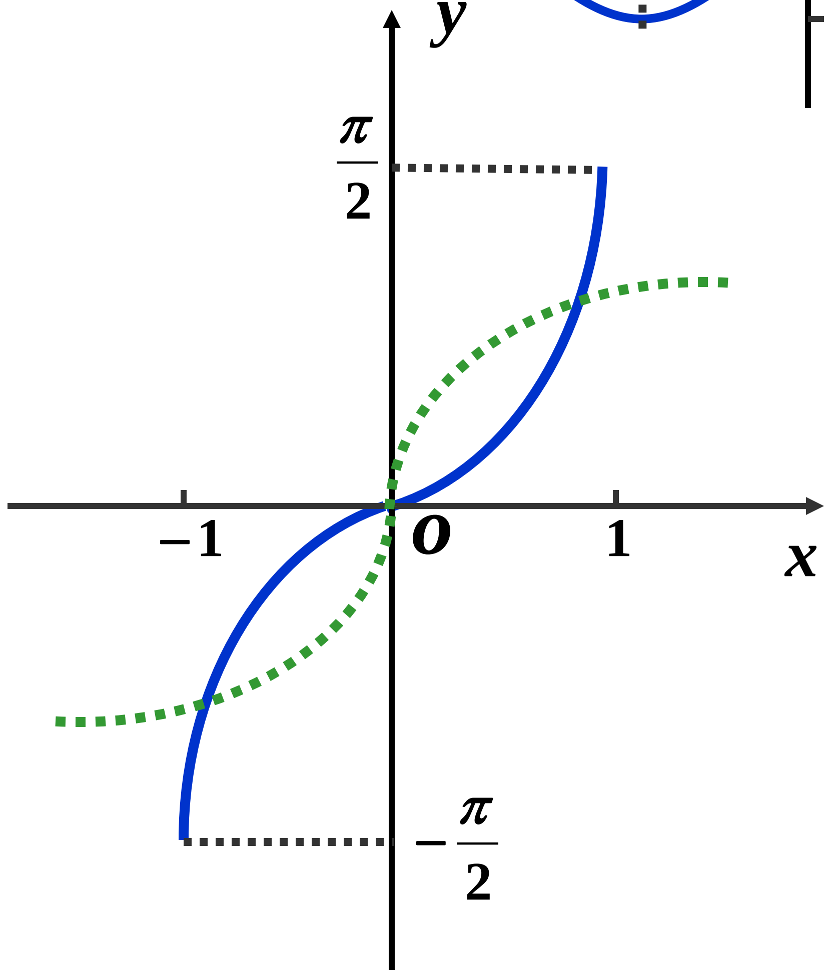
周期: π 。奇函数。

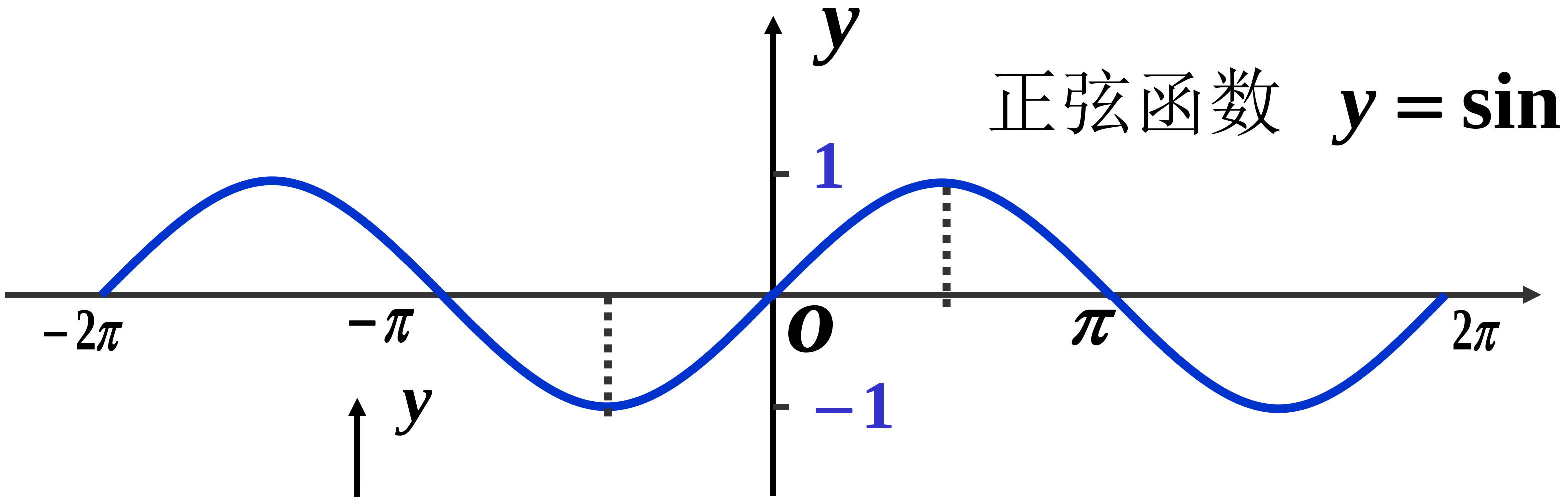


正弦函数 $y = \sin x$



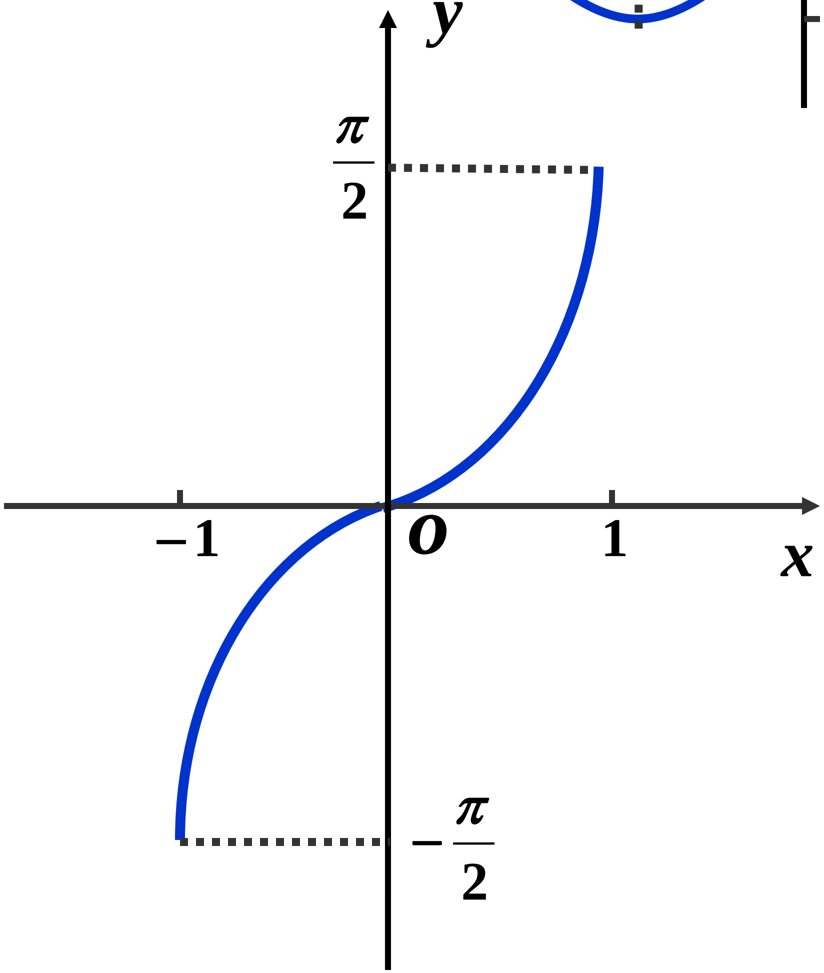
反正弦函数 $y = \arcsin x$





正弦函数 $y = \sin x$

反正弦函数 $y = \arcsin x$



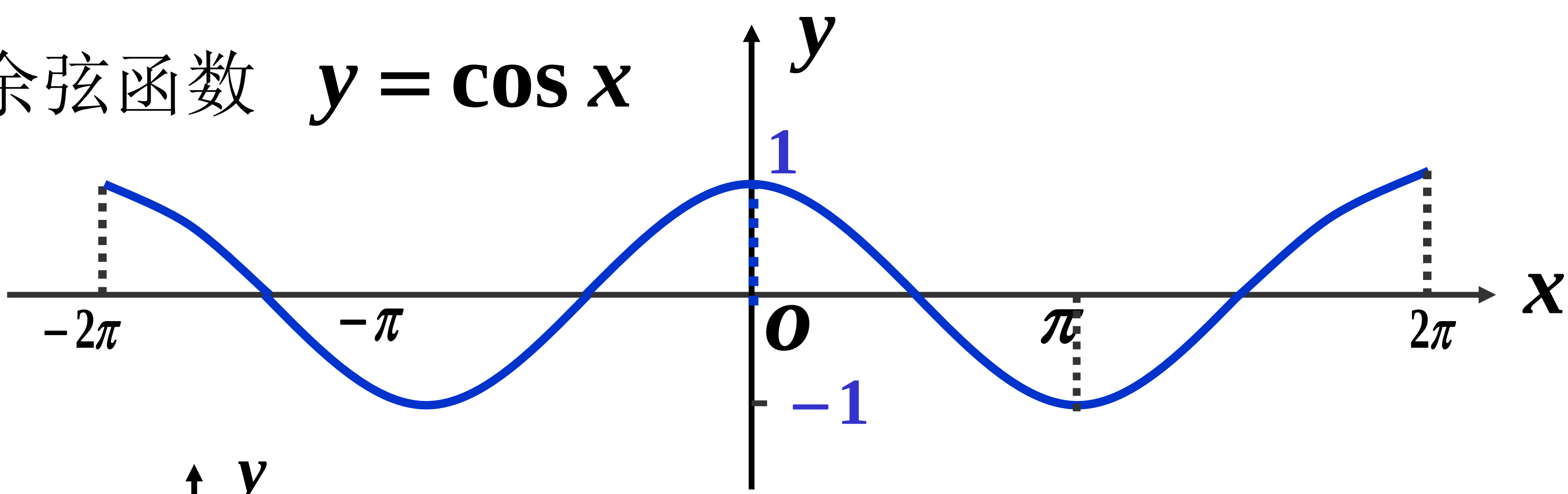
定义域：$[-1, 1]$

值域：$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

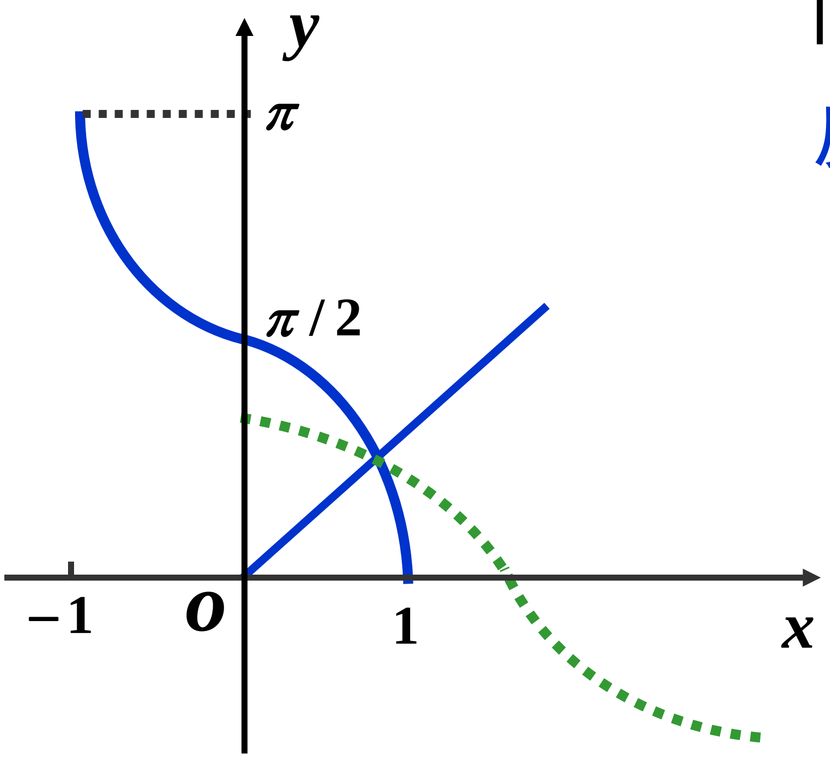
单调增加函数；

奇函数.

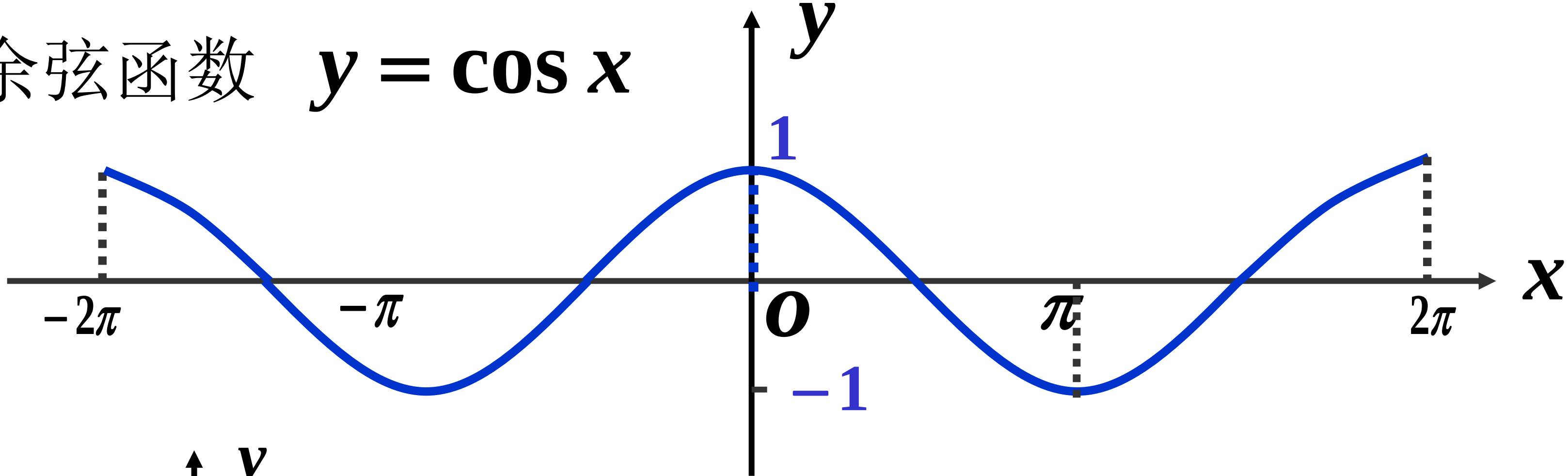
余弦函数 $y = \cos x$

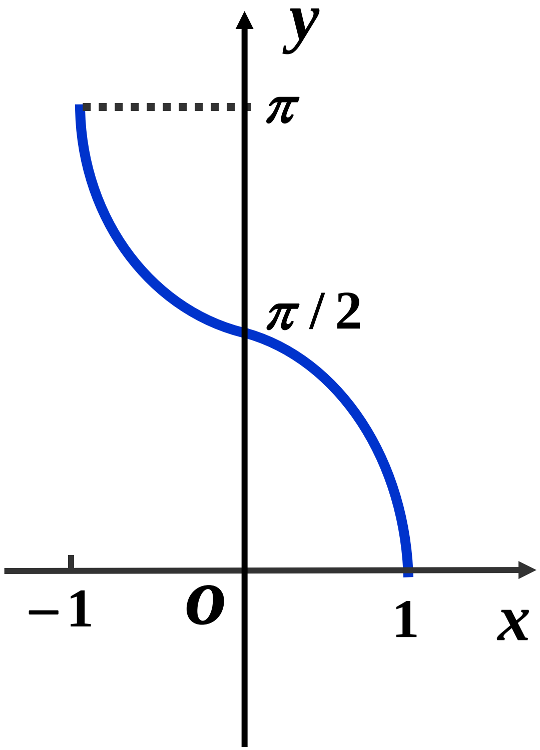


反余弦函数 $y = \arccos x$



余弦函数 $y = \cos x$





反余弦函数 $y = \arccos x$

定义域：$[-1, 1]$

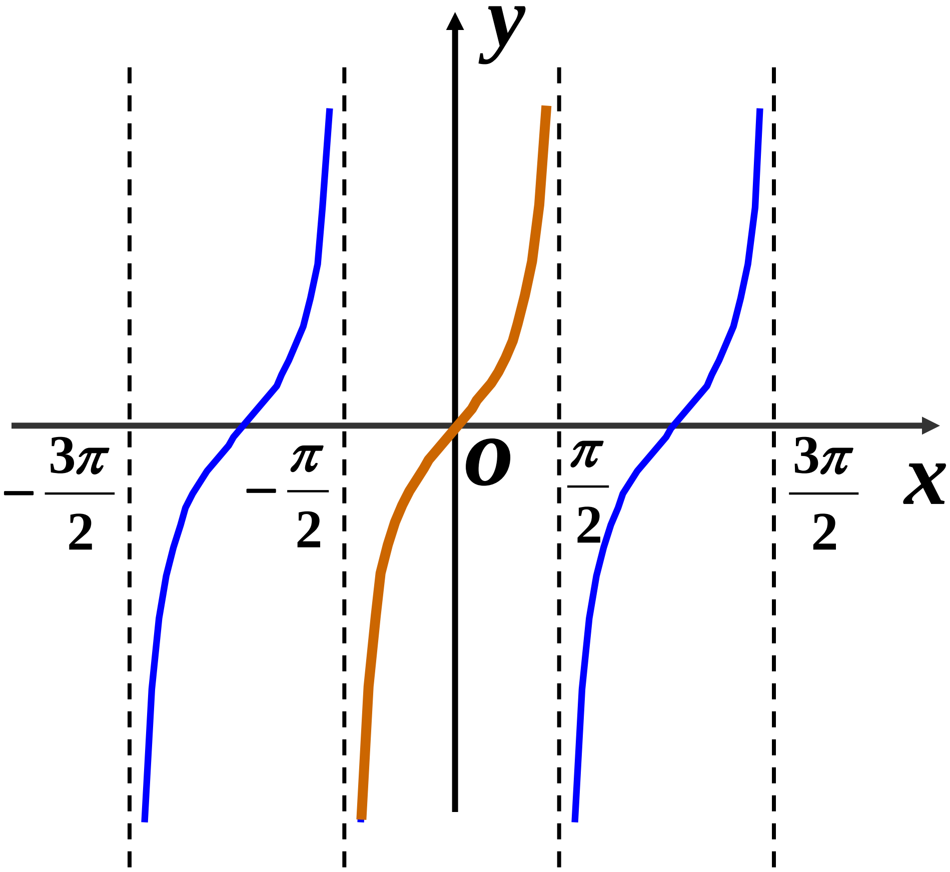
值域：$[0, \pi]$

单调减少函数；

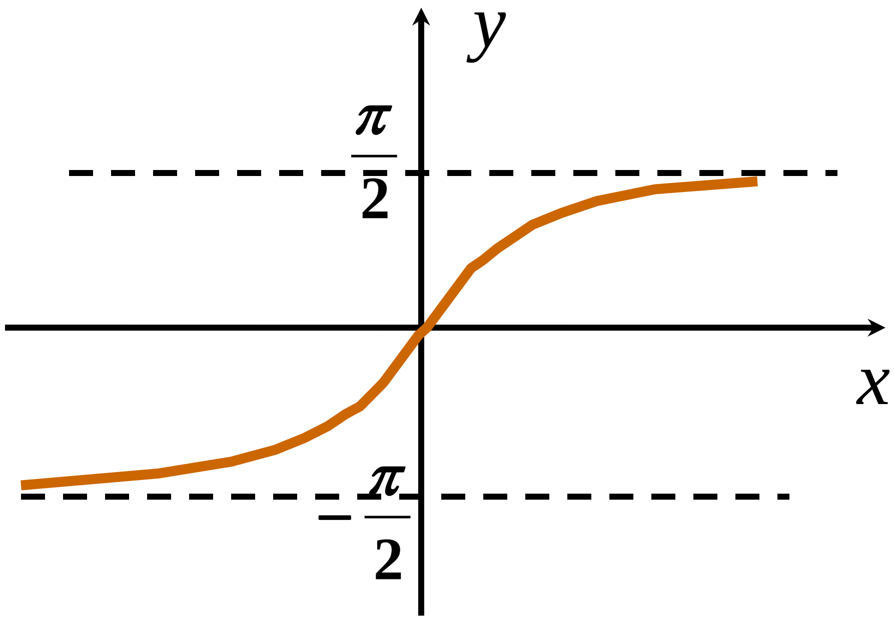
非奇非偶.

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

正切函数 $y = \tan x$



反正切函数 $y = \arctan x$



定义域：$(-\infty, +\infty)$

值域：$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

单调增加函数；

奇函数.

第八节 初等函数

初等函数

初等函数 由基本初等函数经过**有限次四则运算(加、减、乘、除)和复合运算**所构成的一切函数统称为**初等函数**