微积分I

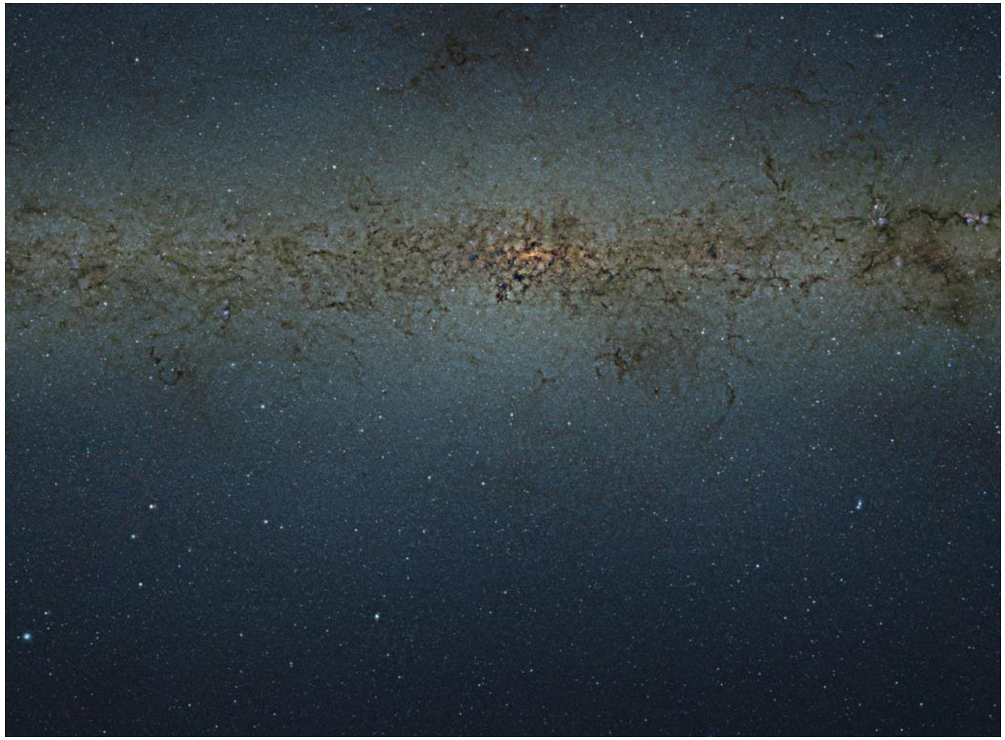
3学分、外招

第二章 数列与极限

数学系王伟文

无限的观念

这张银河系中心部分的惊人景象是由 ESO 位于智利的帕拉纳尔天文台的 VISTA 巡天望远镜拍摄到的。这张巨大的图片大小为 108 200 x 81 500 像素，包含近 90 亿像素。



https://www.eso.org/public/images/eso1242a/

To infinity
and beyond...

吾生也有涯，而知也无涯。以有涯随无涯，殆已！

一尺之棰，日取其半，万世不竭

第一节 数列的极限

(一) 数列

数列 一个定义在正整数集合上的函数$y_n = f(n)$, 当自变量n按正整数1,2,3, ...依次增大的顺序取值时，函数值按相应的顺序排成的一串数：

$$f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots$$

称为一个**无穷数列**，简称**数列**，其中的每一个数称为数列的一项，$f(n)$称为数列的**通项**, 数列可以简记为$\{f(n)\}$

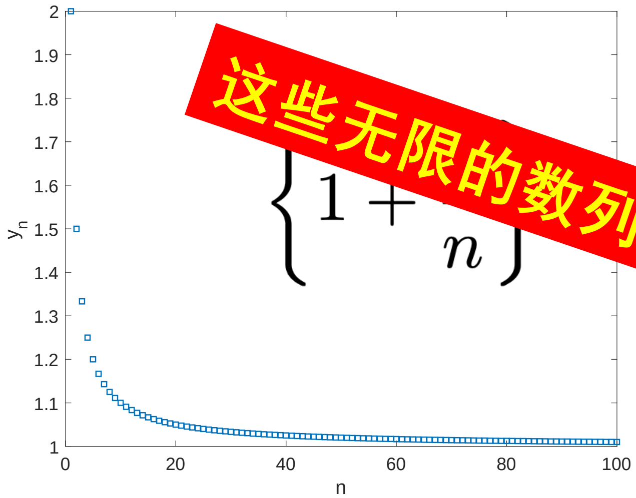
$$\boldsymbol{y_n = f(n) = 2^n : \{f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots\} = \{2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots\}}$$

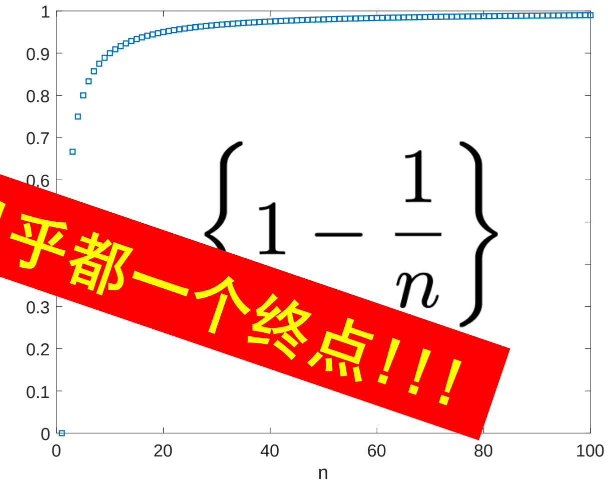
$$\boldsymbol{y_n = f(n) = 1/n : \{f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots\} = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}}$$

第一节 数列的极限

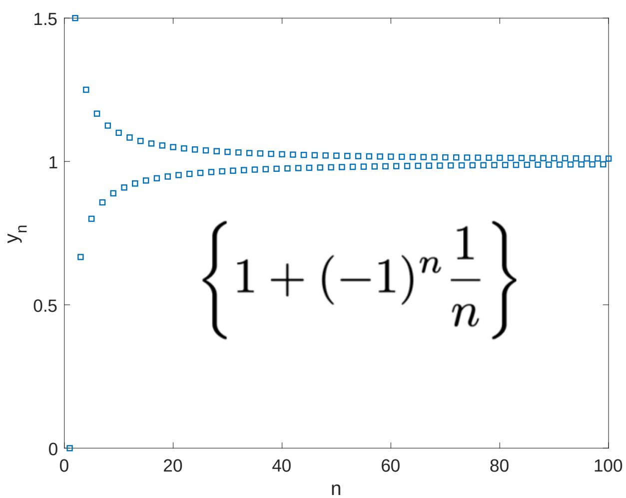
（二） 数列的极限

数列中项随着n的变化情况





这些无限的数列似乎都一个终点!!!



- 当n无限增大时，y_n是否无限接近于某一确定的数值？ 如果是，如何确定？
- “无限接近”意味着什么？如何用数学语言刻划它？

第一节 数列的极限

（二）数列的极限

正数ε	数列下标	正整数N	$\|y_n-1\|=\frac{1}{n}<\varepsilon$

给定 $\frac{1}{10}$，当 $n>10$ 时，有 $|a_n-1|=\frac{1}{n}<\frac{1}{10}$.

给定 $\frac{1}{100}$，当 $n>100$ 时，有 $|a_n-1|=\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$

给定 $\frac{1}{1000}$，当 $n>1000$ 时，有 $|a_n-1|=\frac{1}{n}<\frac{1}{1000}$

考虑通项为$y_n=1+\frac{1}{n}$的数列

考察y_n与1的距离

$$|y_n-1|=\frac{1}{n}$$

如果要使得这个距离小于某个正数$\varepsilon>$

即

$$|y_n-1|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

这要求

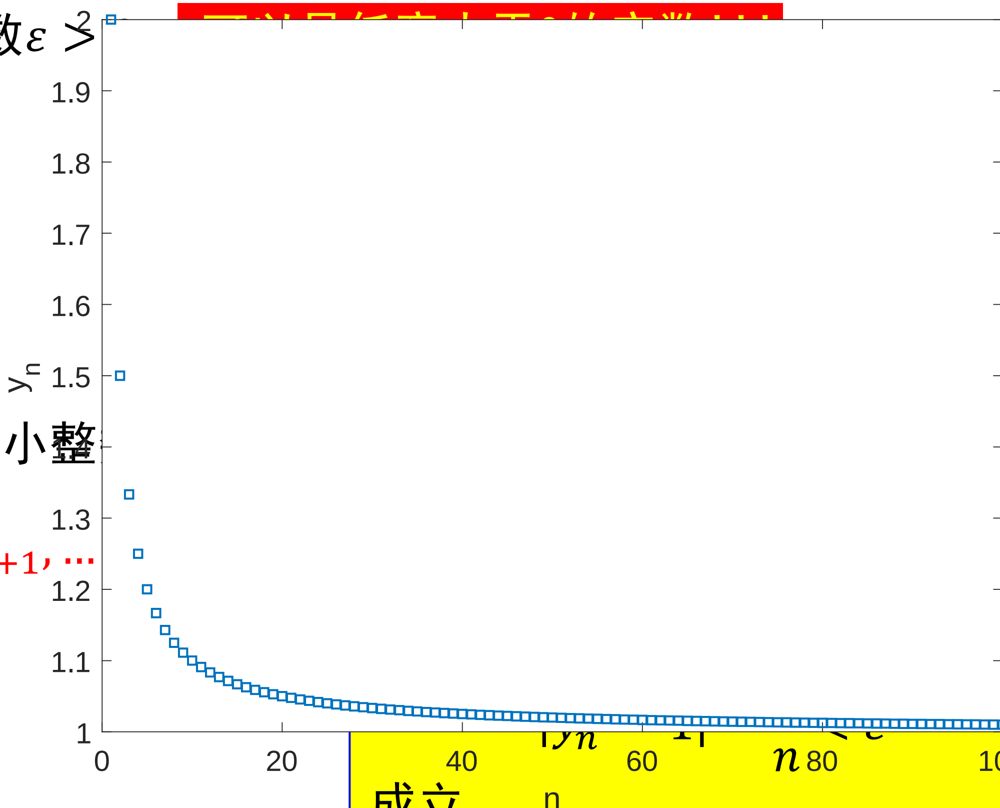
$$n>\frac{1}{\varepsilon}$$

取$N=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil$, $\lceil x\rceil$表示大于等于x的最小整

$\{y_1,y_2,y_3,\dots,y_{N-1},y_N,y_{N+1},\dots$

$n<N:|y_n-1|\geq\varepsilon$

$n\geq N:|y_n-1|<\varepsilon$



给

求

$\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil$,

不

$|y_n$ n

成立。

第一节 数列的极限

（二）数列的极限

极限 如果对于**任意给定的正数ε，总存在一个正整数N**，当$n > N$时，

$$|y_n - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称当n趋于无穷大时，数列y_n以常数A为**极限**，或称y_n**收敛于**常数A，记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \text{ 或 } y_n \to A(n \to \infty)$$

- **若数列有极限，则称该数列是收敛的，否则称它是发散的**
- **上述定义只能用于验证数列的极限，不能用于求解数列的极限**

（二） 数列的极限

课本例5 利用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$

解　　对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，要使不等式

$$\left|\frac{2n+1}{n}-2\right|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

成立，则要则$n>\frac{1}{\varepsilon}$。

因此，对于任意$\varepsilon>0$，取**正整数**$\boldsymbol{N}=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，

$$\left|\frac{2n+1}{n}-2\right|<\varepsilon$$

恒成立，故$y_n=\frac{2n+1}{n}$以2为极限

第二节 函数的极限

(一) 当$x \to \infty$时函数$f(x)$的极限

函数极限 如果对于任意给定的正数ε, 总存在一个正数M, 当$|x| > M$时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称当x趋于无穷大时，函数$f(x)$以常数A为**极限**，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to \infty)$$

极限 如果对于任意给定的正数ε, 总存在一个正整数N, 当$n > N$时,

$$|y_n - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称当n趋于无穷大时，数列y_n以常数A为**极限**，或称y_n **收敛于**常数A，记作

$$\lim_{n \to \infty} y_n = A \text{ 或 } y_n \to A(n \to \infty)$$

第二节 函数的极限

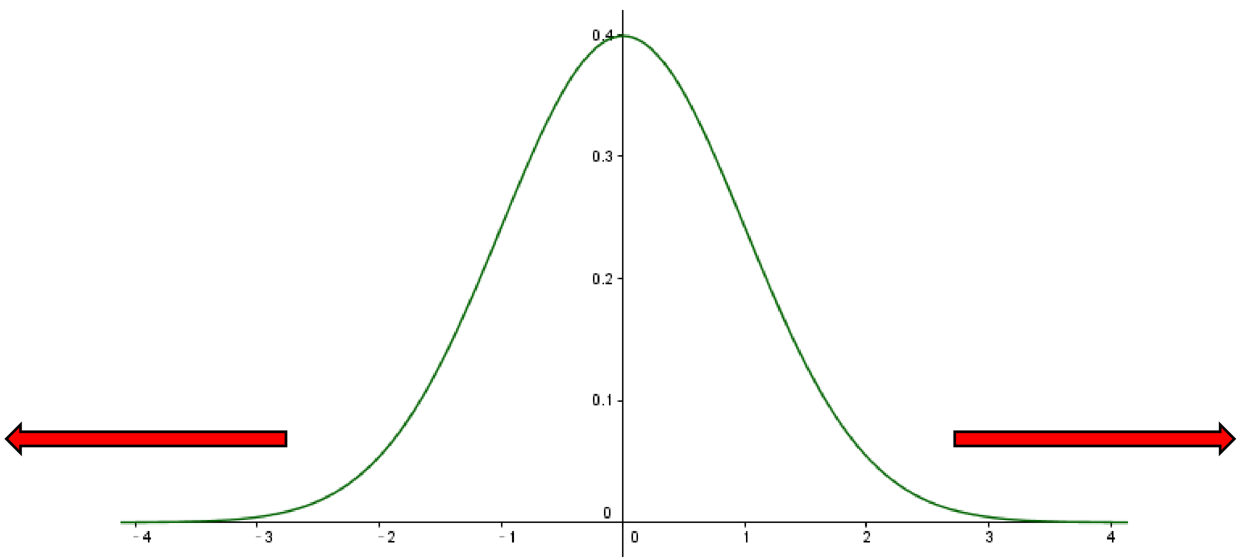
(一) 当$x \to \infty$时函数$f(x)$的极限

函数极限 如果对于**任意给定的正数ε, 总存在一个正数M**, 当$|x| > M$时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称当x趋于无穷大时，函数$f(x)$以常数A为**极限**，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to \infty)$$



第二节 函数的极限

(一) 当$x \to \infty$时函数$f(x)$的极限

函数极限 如果对于**任意给定的正数ε, 总存在一个正数M**, 当$|x| > M$时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称当x趋于无穷大时，函数$f(x)$以常数A为**极限**，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to \infty)$$

- **若**$x > M$ **则记作**$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$
- **若**$x < -M$ **则记作**$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$

第二节 函数的极限

(一) 当$x \to \infty$时函数$f(x)$的极限

课本例1 利用定义证明$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

解 对于任意给定的正数$\varepsilon>0$, 要使不等式

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

成立, 则要则$|x|>\frac{1}{\varepsilon}$。

因此，对于任意$\varepsilon>0$，取**正数$M=|\frac{1}{\varepsilon}|$, 当$|x|>M$时**，

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$$

恒成立，故$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$。

第二节 函数的极限

（二）当$x \to x_0$时函数$f(x)$的极限

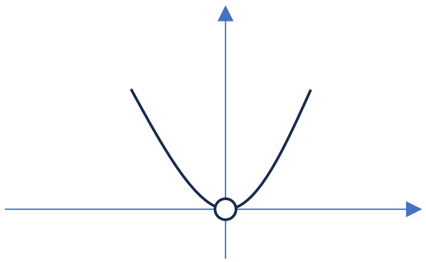
函数极限 如果对于**任意给定的正数ε，总存在一个正数δ**，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称当x趋于x_0，函数$f(x)$以常数A为**极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0)$$

- **空心邻域$\dot{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$一定包含在$f(x)$的定义域中**
- **函数$f(x)$在$x = x_0$这一点不一定有定义**



第二节 函数的极限

(二) 当$x \to x_0$时函数$f(x)$的极限

课本例5 利用定义证明$\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)=4$

解　对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，要使不等式

$$|(3x-2)-4|=|3x-6|=\mathbf{3|x-2|}<\varepsilon$$

成立, 则要则$|x-2|<\frac{\epsilon}{3}$。

因此，对于任意$\varepsilon>0$，取**正数$\boldsymbol{\delta=\frac{\varepsilon}{3}}$, 当**$0<$ **$|x-2|<\delta$时，**

$$|(3x-2)-4|<\varepsilon$$

恒成立，故$\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)=4$。

第二节 函数的极限

(三)左极限与右极限

右极限 如果对于任意给定的正数ε, 总存在一个正数δ, 当$0 < x - x_0 < \delta$时,

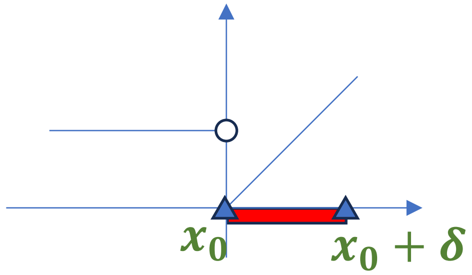
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称当x趋于x_0，函数$f(x)$以常数A为右极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x+0) \to A(x \to x_0)$$

- 右邻域$\dot{U}_+(x_0, \delta) = \{x | 0 < x - x_0 < \delta\}$一定包含在$f(x)$的定义域中
- 函数$f(x)$在$x = x_0$这一点不一定有定义

$$f(x) = \begin{cases} 1, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}$$



第二节 函数的极限

(三) 左极限与右极限

左极限 如果对于**任意给定的正数ε，总存在一个正数δ**，当$-\delta < x - x_0 < 0$时，

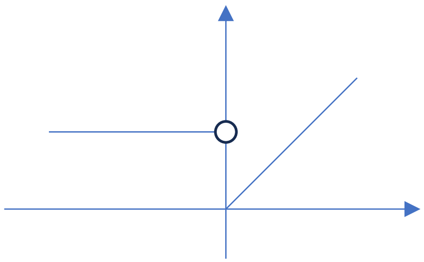
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称当x趋于x_0，函数$f(x)$以常数A为**左极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x-0) \to A(x \to x_0)$$

- **左邻域$\dot{U}_-(x_0, \delta) = \{x | -\delta < x - x_0 < 0\}$一定包含在$f(x)$的定义域中**
- **函数$f(x)$在$x = x_0$这一点不一定有定义**

$$f(x) = \begin{cases} 1, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}$$



Limitation	Condition	Existence
$\lim_{n\to\infty} y_n = A$	$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}_+$, if $n > N$ then $\|y_n - A\| < \varepsilon$	Find $n \in \mathbb{N}_+$, such that $\|y_n - A\| < \varepsilon$ and $N \triangleq n$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0, \exists\, M > 0$, if $\|x\| > M$ then $\|f(x) - A\| < \varepsilon$	Find $M > 0$, such that $\|f(x) - A\| < \varepsilon$ when $\|x\| > M$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0, \exists\, M > 0$, if $x > M$ then $\|f(x) - A\| < \varepsilon$	Find $M > 0$, such that $\|f(x) - A\| < \varepsilon$ when $x > M$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0, \exists\, M > 0$, if $x < -M$ then $\|f(x) - A\| < \varepsilon$	Find $M > 0$, such that $\|f(x) - A\| < \varepsilon$ when $x < -M$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, if $0 < \|x - x_0\| < \delta$ then $\|f(x) - A\| < \varepsilon$	Find $\delta > 0$, such that $\|f(x) - A\| < \varepsilon$ when $0 < \|x - x_0\| < \delta$
$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, if $0 < x - x_0 < \delta$ then $\|f(x) - A\| < \varepsilon$	Find $\delta > 0$, such that $\|f(x) - A\| < \varepsilon$ when $0 < x - x_0 < \delta$
$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, if $-\delta < x - x_0 < 0$ then $\|f(x) - A\| < \varepsilon$	Find $\delta > 0$, such that $\|f(x) - A\| < \varepsilon$ when $-\delta < x - x_0 < 0$

$\forall$: For every
$\exists$: There exists
$\mathbb{N}_+$: Positive natural numbers

第三节 关于极限的定理

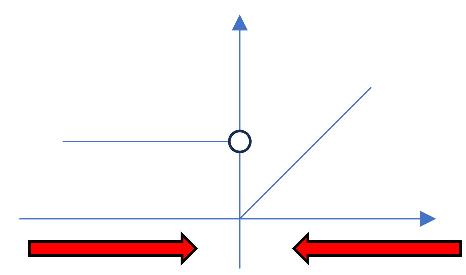
(一) 极限存在判定定理

极限存在判定定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$成立的**充分必要条件**是

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

充分 P $\rightleftarrows$ 必要 Q

课本例7 设函数$f(x)=\begin{cases}1, x<0\\ x, x\geq 0\end{cases}$, 判定极限$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$是否存在.



$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 1=1$$

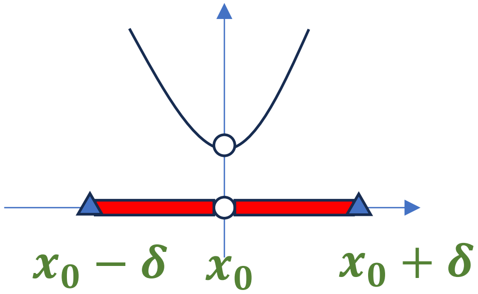
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在

第三节 关于极限的定理

(二) 极限局部保号性

极限保号性 如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且$\boldsymbol{A > 0\,(A < 0)}$，则总存在一个正数$\delta$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时$\boldsymbol{f(x) > 0\,(f(x) < 0)}$



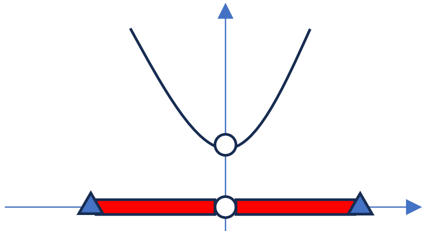
空心邻域的函数值符号总是和极限值的符号一致的!!!

第三节 关于极限的定理

（三）极限局部保号性

极限保号性 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且$f(x)\ge 0$（$f(x)\le 0$）， 则$A\ge 0(A\le 0)$

- $f(x)\ge 0$ 意味着x_0的空心邻域上的函数值大于等于0（非负）



空心邻域的函数值符号总是和极限值的符号一致的！！！

第三节 关于极限的定理

(四) 极限局部有界性

极限局部有界 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则总存在一个正数$\delta$和$M$，当$0<|x-x_0|<\delta$时

$$|f(x)|<M$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)|<A+\varepsilon \triangleq M$$

$$\delta \triangleq \delta(\varepsilon)$$

在x_0处收敛的函数必在x_0的空心邻域内有界！！！

第四节 无穷大量与无穷小量

（一）无穷大量

无穷大量 如果$\lim\limits_{x \to P} f(x) = \infty(\infty, -\infty, +\infty)$，则函数$f(x)$为当$x \to P$时的**无穷大量**

- $x \to P$代指某一个取极限过程，可以是$x \to \infty$、$x \to -\infty$、 $x \to +\infty$、 $x \to x_0^+$、 $x \to x_0^-$、 $x \to x_0$
- 无穷大量是一个变量，不是一个绝对值很大的数
- 称函数是无穷大量，必须指明其自变量的变化趋势

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

第四节 无穷大量与无穷小量

(一) 无穷大量

- 无穷或无限大，来自于拉丁文的“infinitas”，即“没有边界”的意思
- 无穷大量“∞”与莫比乌斯环

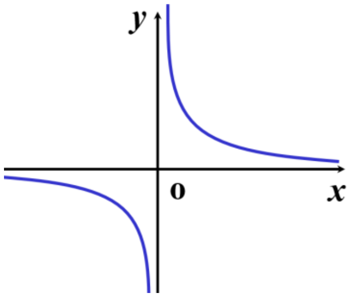
青年向禅师讨教，希望可以让他的女朋友没有缺点，只有优点。禅师微笑着，请青年为他找一张只有正面没有背面的纸。然后青年掏出了一个莫比乌斯环……

第四节 无穷大量与无穷小量

(一) 无穷大量

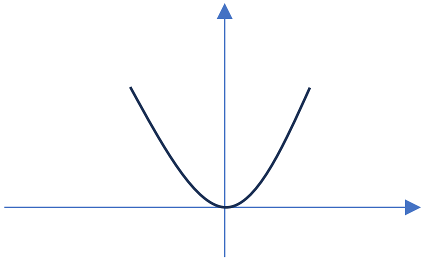
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$： $\forall M>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|\ge M$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$



$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\infty$： $\forall M>0,\exists A>0,$当$|x|>A$时，有$|f(x)|\ge M$

- $\lim\limits_{x\to \infty} x^2=\infty$



第四节 无穷大量与无穷小量

(一) 无穷大量

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$: $\forall M > 0, \exists A > 0$, 当$|x| > A$时，有$|f(x)| \geq M$

- 无界变量：$\forall M > 0, \exists x$，有$|f(x)| \geq M$

无穷大量必定是无界变量，无界变量不一定是无穷大量

- $\lim_{x\to\infty} x\sin x \neq \infty$

海涅定理

第四节 无穷大量与无穷小量

(二)无穷小量

无穷小量 如果$\lim\limits_{x \to P} f(x) = 0$，则函数$f(x)$为当$x \to P$时的**无穷小量**

- $x \to P$代指某一个取极限过程，可以是$x \to \infty$、$x \to -\infty$、 $x \to +\infty$、 $x \to x_0^+$、 $x \to x_0^-$、 $x \to x_0$
- 无穷小量是一个变量，不是一个数, **但0是唯一可以作为无穷小量的数**
- 称函数是无穷小量，必须指明其自变量的变化趋势

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

数列$\{\frac{(-1)^n}{n}\}$是当$n \to \infty$时的无穷小量

第四节 无穷大量与无穷小量

(二) 无穷小量

无穷小量与有界量的乘积依然是无穷小量

如果$\lim\limits_{x\to P} f(x)=0$，且$g(x)$在$x\to P$时有界，则

$$\lim_{x\to P} g(x)\cdot f(x)=0$$

- 无穷小量与常量的乘积依然是无穷小量（常量必然是有界量）

$$\lim_{x\to 0} x\cdot \sin\frac{1}{x}=?$$

第四节 无穷大量与无穷小量

(三)无穷小量与无穷大量的关系

- $\lim\limits_{x\to P} f(x)=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to P}\dfrac{1}{f(x)}=0$
- $\lim\limits_{x\to P} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to P}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$ ($x\to P$时$\dfrac{1}{f(x)}$合法)

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x\cdot\sin\frac{1}{x}}=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0\,.$$

(因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\infty$)

第四节 无穷大量与无穷小量

(四) 无穷小量的阶

- $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0} 2x = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$ x^2要比x快
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2$ $2x$与x差不多
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \infty$ x比x^2慢得到多

同一极限过程两个无穷小量的比值反映两者趋于“零”速度快慢的差异!!!

第四节 无穷大量与无穷小量

(四) 无穷小量的阶

设$\lim\limits_{x\to P} f(x)=\lim\limits_{x\to P} g(x)=0$

- $x\to P$时，$g(x)$是$f(x)$的**高阶无穷小**，若

$$\lim_{x\to P}\frac{g(x)}{f(x)}=0,\ 记作g(x)=o(f(x))$$

- $x\to P$时，$g(x)$是$f(x)$的**同阶无穷小**，若

$$\lim_{x\to P}\frac{g(x)}{f(x)}=c(c\neq 0),$$

若$c=1$，则称为**等价无穷小**，记作$g(x)\sim f(x)$

- $x\to P$时，$g(x)$是$f(x)$的**低阶无穷小**，若

$$\lim_{x\to P}\frac{g(x)}{f(x)}=\infty$$

第四节 无穷大量与无穷小量

(四) 无穷小量的阶

- $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0} 2x = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$ x^2要比x快 当$x \to 0$ 时x^2是x的高阶无穷小，记作$x^2 = o(x)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2$ $2x$与x差不多 当$x \to 0$ 时$2x$是x的同阶无穷小，记作$2x \sim x$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \infty$ x比x^2慢得到多 当$x \to 0$ 时x是x^2的低阶无穷小