微积分I 3学分、外招

第二章 数列与极限

数学系王伟文

第一节 极限的运算法则

（一）极限的四则运算

四则运算 设$\lim\limits_{x\to P} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to P} g(x)=B$，**且$A$和$B$均为常数**, 则

- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to P} f(x)\pm\lim\limits_{x\to P} g(x)=A\pm B$
- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to P} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to P} g(x)=A\cdot B$
- $\lim\limits_{x\to P}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to P} f(x)}{\lim\limits_{x\to P} g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$

- **四则运算一定注意要满足前提条件**
- **$\lim\limits_{x\to P}[f(x)\pm g(x)]$的极限存在不能推出$\lim\limits_{x\to P} f(x)$与$\lim\limits_{x\to P} g(x)$的存在**

有限个无穷小量之和依然是无穷小量！！！

第一节 极限的运算法则

（一） 极限的四则运算

四则运算 设$\lim\limits_{x\to P} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to P} g(x) = B$，**且$A$和$B$均为常数**, 则

- $\lim\limits_{x\to P}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to P} f(x) \pm \lim\limits_{x\to P} g(x) = A \pm B$
- $\lim\limits_{x\to P}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to P} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to P} g(x) = A \cdot B$
- $\lim\limits_{x\to P} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to P} f(x)}{\lim\limits_{x\to P} g(x)} = \dfrac{A}{B} (B \neq 0)$

- 四则运算一定注意要满足前提条件
- $\lim\limits_{x\to P}[f(x) \pm g(x)]$的极限存在不能推出$\lim\limits_{x\to P} f(x)$与$\lim\limits_{x\to P} g(x)$的存在

有限个无穷小量之和依然是无穷小量!!!

第一节 极限的运算法则

（一） 极限的四则运算

四则运算 设$\lim\limits_{x\to P} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to P} g(x)=B$，**且$A$和$B$均为常数**, 则

- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to P} f(x)\pm\lim\limits_{x\to P} g(x)=A\pm B$
- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to P} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to P} g(x)=A\cdot B$
- $\lim\limits_{x\to P}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to P} f(x)}{\lim\limits_{x\to P} g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$

- 四则运算一定注意要满足前提条件
- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\pm g(x)]$的极限存在不能推出$\lim\limits_{x\to P} f(x)$与$\lim\limits_{x\to P} g(x)$的存在

有限个无穷小量之和依然是无穷小量!!!

第一节 极限的运算法则

（一）极限的四则运算

四则运算 设$\lim\limits_{x\to P} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to P} g(x)=B$，**且$A$和$B$均为常数**, 则

- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to P} f(x)\pm\lim\limits_{x\to P} g(x)=A\pm B$
- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to P} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to P} g(x)=A\cdot B$
- $\lim\limits_{x\to P}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to P} f(x)}{\lim\limits_{x\to P} g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$

- **四则运算一定注意要满足前提条件**
- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\pm g(x)]$**的极限存在不能推出**$\lim\limits_{x\to P} f(x)$**与**$\lim\limits_{x\to P} g(x)$**的存在**

有限个无穷小量之和依然是无穷小量!!!

第一节 极限的运算法则

（一） 极限的四则运算

关于乘法的推论

$$\lim_{x\to P}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to P} f(x)\cdot \lim_{x\to P} g(x) = A\cdot B$$

- 无穷小量的乘积仍然为无穷小量
- 常数因子与极限过程无关，即$\lim\limits_{x\to P} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to P} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to P} [f(x)]^{\alpha} = [\lim\limits_{x\to P} f(x)]^{\alpha}, (\alpha > 0)$

第一节 极限的运算法则

（一）极限的四则运算

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})$

解

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$$

$$=0+0+\cdots+0$$

$$=0.$$

有限个无穷小量之和依然是无穷小量!!!

第一节 极限的运算法则

（一） 极限的四则运算

例2 求$\lim\limits_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}$

解

$$\lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to0} x \times \lim_{x\to0} \sin\frac{1}{x} = 0$$

$\lim\limits_{x\to0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在 ！！！

第一节 极限的运算法则

（二） 多项式的极限

n次多项式 形如函数$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，其中$a_0,a_2,\ldots,a_n$为给定的实数，$n$为已知的正整数，且$a_0\neq 0$，称函数$p(x)$为**$n$次多项式**

$-2x^3$ 3次多项式

$-2x$ 1次多项式

x^2+2x+1 2次多项式

x^4+2x^2+1 4次多项式

若$p(x)$为多项式则

$$\lim_{x\to x_0} p(x)=p(x_0)$$

第一节 极限的运算法则

（二） 多项式的极限

若$p(x)$为多项式则

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$$

课本例1 求$\lim\limits_{x\to 1} 3x^2 - 2x + 1$

解： $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2 - 2x + 1 = 3\cdot 1^2 - 2\cdot 1 + 1 = 2$

第一节 极限的运算法则

（二） 多项式的极限

若$p(x)$为多项式则

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$$

课本例2 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-5}{3x+1}$

解： 因为$\lim\limits_{x\to 2} 2x^2+x-5 = 2\cdot 2^2+2-5=5,$

$$\lim_{x\to 2} 3x+1 = 3\cdot 2+1 = 7 \neq 0$$

所以$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-5}{3x+1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} 2x^2+x-5}{\lim\limits_{x\to 2} 3x+1} = \dfrac{5}{7}$

第一节 极限的运算法则

（二） 多项式的极限

若$p(x)$为多项式则

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$$

课本例3 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x}{x^2-4}$

解：　因为$\lim\limits_{x\to 2} 5x = 10$,

$$\lim_{x\to 2} x^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0$$

所以$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x}{x^2-4} \overset{\neq}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} 5x}{\lim\limits_{x\to 2} x^2-4} = \dfrac{10}{0} = \infty$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{5x} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} x^2-4}{\lim\limits_{x\to 2} 5x} = \frac{0}{10} = 0$$

所以$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} {}^{1}\!\Big/_{\frac{x^2-4}{5x}} = \infty$

第一节 极限的运算法则

（二） 多项式的极限

若$p(x)$为多项式则

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$$

课本例4 求$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$

$$\frac{0}{0}$$

解： 因为当$x\to 3$时，$x-3\neq 0$

所以

$$\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x+3}$$

因此

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}x+3}=\frac{1}{6}$$

第一节 极限的运算法则

（二）多项式的极限

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

课本例6 求 $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3+8}\right)$ $\infty - \infty$

解： 当$x \to -2$时， $x \neq -2$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3+8} = \frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3-(-2)^3} = \frac{1}{x+2} - \frac{12}{[x-(-2)][x^2-2x+(-2)^2)]}$$

$$= \frac{1}{x+2} - \frac{12}{[x+2][x^2-2x+4]}$$

$$= \frac{x^2-2x+4}{(x+2)(x^2-2x+4)} - \frac{12}{(x+2)\ (x^2-2x+4)}$$

$$= \frac{x^2-2x-8}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$= \frac{x-4}{x^2-2x+4}$$

第一节 极限的运算法则

（二） 多项式的极限

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{x-4}{x^2-2x+4}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to -2} x-4}{\lim\limits_{x\to -2} x^2-2x+4}=\frac{-2-4}{(-2)^2-2\cdot(-2)+4}=-\frac{1}{2}$$

第一节 极限的运算法则

（三） 多项式分式的极限计算规则

$x\to\infty$时多项式比值的极限计算公式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},n=q\\ 0,n<q\\ \infty,n>q\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{8x^2+7x}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+7x}{2x^3+1}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{8x^3+7x}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

只有当$x\to\infty$时上述结论才成立!!!