微积分I

3学分、外招

第二章 数列与极限

数学系王伟文

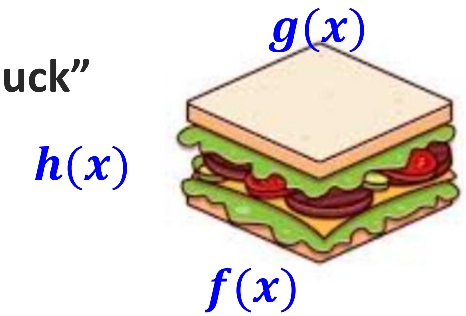
第二节 两个重要的极限

（一）极限存在的准则

两边夹 如果$f(x) \le h(x) \le g(x)$, 且$\lim\limits_{x\to P} f(x) = \lim\limits_{x\to P} g(x) = A$, 则

$\lim\limits_{x\to P} h(x) = A$

“If it walks like a duck, talks like a duck, it probably is a duck”



第二节 两个重要的极限

（一）极限存在的准则

课本例3 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 $\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$,

由两边夹准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

第二节 两个重要的极限

（一） 极限存在的准则

单调与有界数列

- 设有数列$y_n = f(n)$，如果对于任意正整数n，恒有

$$f(n) < f(n+1),$$

则$f(n)$为**单调增加数列**；

- 如果对于任意正整数n, 恒有

$$f(n) > f(n+1),$$

则$f(n)$为**单调减少数列**；

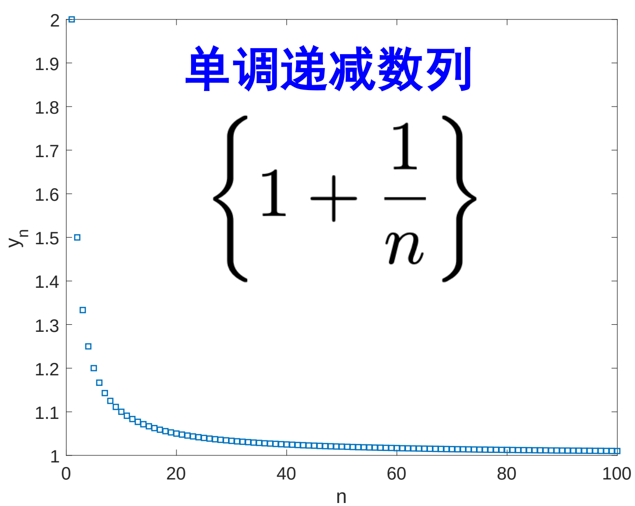
- 如果存在两个常数L、$U(L < U)$，使得对任何整数n，总有

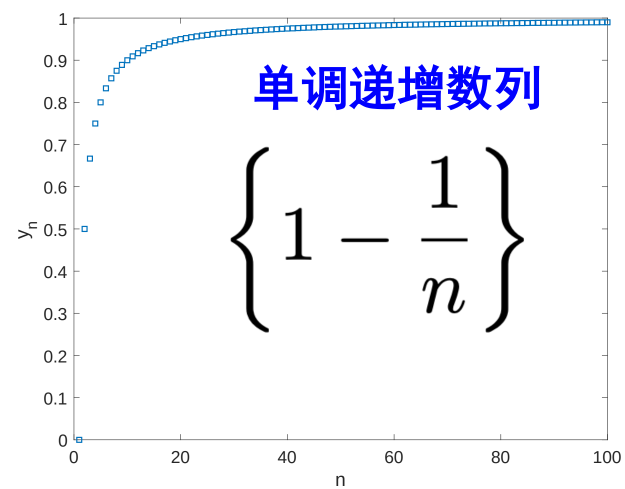
$$L \le f(n) \le U$$

则$f(n)$为**有界数列**。

第二节 两个重要的极限

（一） 极限存在的准则





有界数列 $1 \le 1+\frac{1}{n} \le 2$

有界数列 $0 \le 1-\frac{1}{n} \le 1$

第二节 两个重要的极限

（一） 极限存在的准则

单调有界数列收敛性 如果数列$y_n = f(n)$是单调有界的，则$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$一定存在

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$$

第二节 两个重要的极限

(二) 两个重要极限

重要极限之一

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

更一般的形式

若$\varphi(x) \to 0\,(x \to P)$，则

$$\lim_{x \to P} \frac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)} = 1$$

第二节 两个重要的极限

(二) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

课本例4 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

解 $$\frac{\tan x}{x}=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

第二节 两个重要的极限

(二) 两个重要极限

$$\lim_{\varphi(x)\to 0(x\to P)} \frac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)} = 1$$

课本例5 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}$ (k为非零常数)

$$\varphi(x) = kx$$

$$\varphi(x) \to 0 (x \to 0)$$

解 原式$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x} = k\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{kx}$

$= k \cdot 1 = k$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx} = 1$$

第二节 两个重要的极限

(二) 两个重要极限

$$\lim_{\varphi(x)\to 0(x\to P)} \frac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = ?$$

第二节 两个重要的极限

(二) 两个重要极限

重要极限之二

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

等价变换

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

数列形式 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$

第二节 两个重要的极限

(二) 两个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$ 若$\varphi(x)\to\infty(x\to P)$, ⍰

$$\lim_{x\to P}(1+\frac{1}{\varphi(x)})^{\varphi(x)}=e \qquad e.g.\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}=e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$ 若$\varphi(x)\to 0(x\to P)$, ⍰

$$\lim_{x\to P}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$$

$$e.g.\ \lim_{x\to 2}[1+(x-2)]^{\frac{1}{x-2}}=e$$

第二节 两个重要的极限

(二) 两个重要极限

若$\varphi(x) \to \infty (x \to P)$

则 $\lim\limits_{x \to P}(1 + \dfrac{1}{\varphi(x)})^{\varphi(x)} = e$

课本例7 求$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{x}$

解 $\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{x} = \left(1 + \dfrac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{x} = \left[\left(1 + \dfrac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}$

$$\varphi(x) = \frac{x}{2}$$

$$\varphi(x) \to \infty (x \to \infty)$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}} = e$$

原式$= \lim\limits_{x \to \infty}\left[\left(1 + \dfrac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}$

$= \left[\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}$

$= e^{2}$

第二节 两个重要的极限

(二) 两个重要极限

若 $\varphi(x) \to \infty (x \to P)$

则 $\lim\limits_{x \to P}(1 + \dfrac{1}{\varphi(x)})^{\varphi(x)} = e$

例 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$

解 $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x = \left(1 + \dfrac{1}{-x}\right)^x = \left[\left(1 + \dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}$

$$\varphi(x) = -x$$

原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1 + \dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}$

$$\varphi(x) \to \infty (x \to \infty)$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x} = e$$

$$= e^{-1}$$

(二) 两个重要极限

$$\lim_{x\to -1}(2+x)^{\frac{2}{x+1}}=?$$

例 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x}$

解 $$\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x}=\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\cdot\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{-1}$$

$$=\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=e\cdot 1=e$$

$$\varphi(x)=x+1\to\infty\ (x\to\infty)$$

第三节 利用等价无穷小量代换求极限

等价无穷小替换 若当$x \to P$时，$\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且$\lim\limits_{x \to P} \dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在，则

- $\lim\limits_{x \to P} \dfrac{\alpha'}{\beta'} = \lim\limits_{x \to P} \dfrac{\alpha}{\beta}$
- $\lim\limits_{x \to P} \alpha' f(x) = \lim\limits_{x \to P} \alpha f(x)$

- **等价无穷小量：$\lim\limits_{x \to P} \alpha = \lim\limits_{x \to P} \alpha' = 0$且$\lim\limits_{x \to P} \dfrac{\alpha}{\alpha'} = 1 \Leftrightarrow \alpha \sim \alpha'(x \to P)$**
- **使用等价无穷小替换在某些情形下可以化简极限的计算**

只有在乘、除的极限运算中才能替换；在其他极限运算中不能替换!!!

$\lim\limits_{x \to P} \alpha + \beta = \lim\limits_{x \to P} \alpha' + \beta'$ 不一定成立!!!

第三节 利用等价无穷小量代换求极限

常用等价无穷小：当$x \to 0$时 **熟记!!!**

$\sin x \sim x$, $\arcsin x \sim x$,

$\tan x \sim x$, $\arctan x \sim x$,

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$,

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ (\alpha \neq 0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\sin x \cdot \frac{1}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1} = -1$$

雨课堂随堂练习-极限的四则运算 1分钟

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=?$$

第三节 利用等价无穷小量代换求极限

课本例2 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x\sin x}-1}{\arctan x^2}$

解 因为当$t\to 0$，$(1+t)^{\alpha}-1\sim\alpha t(\alpha\neq 0)$

所以若有$x\sin x\to 0$，则 $\sqrt[3]{1+x\sin x}-1\sim\frac{1}{3}x\sin x$

又因为$x\to 0$时， $x\sin x\to 0$，所以 $\sqrt[3]{1+x\sin x}-1\sim\dfrac{1}{3}x\sin x\ (x\to 0)$

类似地，因为当$t\to 0$，$\arctan t\sim t$

所以若有$x^2\to 0$，则 $\arctan x^2\sim x^2$

又因为$x\to 0$时， $x^2\to 0$，所以 $\arctan x^2\sim x^2(x\to 0)$

利用等价无穷小替换

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\sin x}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

第三节 利用等价无穷小量代换求极限

课本例2 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x\sin x}-1}{\arctan x^2}$

类似地，可以得到

$$\arctan x^2 \sim x^2 (x \to 0)$$

故原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}x\sin x}{x^2}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{3}$

第三节 利用等价无穷小量代换求极限

课本例3 求$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

解　因为当$x \to 0$□，　$\tan x \sim x$, $\sin x \sim x$, $\sin^3 x \sim x^3$ ，故

原式$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x}{x^3} = 0$

极限运算中的加减法不能做等价无穷小量替换!!!

小结 求极限的方法

- 若$p(x)$为多项式则

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$$

- $x\to\infty$时多项式比值的极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, n=q\\ 0, n<q\\ \infty, n>q\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{8x^2+7x}$$

- 两边夹 如果$f(x)\le h(x)\le g(x)$, 且$\lim\limits_{x\to P} f(x)=\lim\limits_{x\to P} g(x)=A$, 则

$$\lim_{x\to P} h(x)=A$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

- 无穷小量与有界量的乘积依然是无穷小量 如果$\lim\limits_{x\to P} f(x)=0$，且$g(x)$在$x\to P$时有界，则

$$\lim_{x\to P} g(x)\cdot f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=?$$

小结 求极限的方法

- 两个重要极限及其变形

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad 若\varphi(x)\to 0(x\to P)，则\lim_{x\to P}\frac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e \quad 若\varphi(x)\to\infty(x\to P)，则\lim_{x\to P}(1+\frac{1}{\varphi(x)})^{\varphi(x)}=e$$

- 等价无穷小替换 当$x\to 0$时

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$$

$\sin x\sim x$, $\arcsin x\sim x$,
$\tan x\sim x$, $\arctan x\sim x$,
$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$
$\ln(1+x)\sim x$, $e^x-1\sim x$,
$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x\ (\alpha\neq 0)$