微积分I

3学分、外招

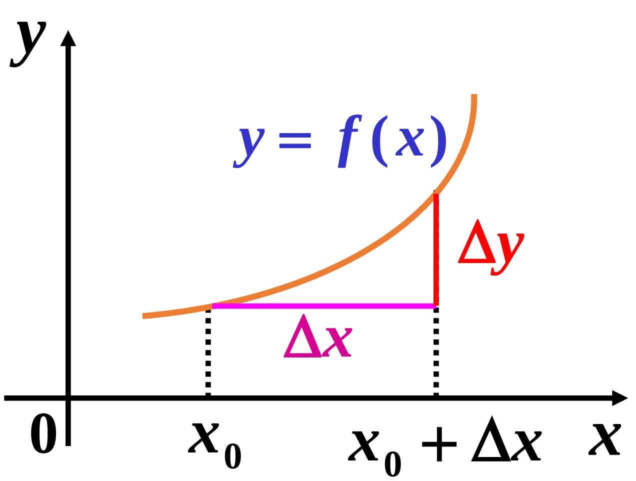
第二章 数列与极限

数学系王伟文

第一节 函数的连续性

(一) 函数的改变量

设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域$U(x_0,\delta)$内有定义，对于任意$x\in\dot{U}(x_0,\delta)$, 称$\Delta x=x-x_0$为自变量在x_0处的**改变量**，$\Delta y=f(x)-f(x_0)$称为函数$f(x)$相应于Δx的**改变量**



第一节 函数的连续性

(二) 连续函数的概念

函数$y = f(x)$在x_0处连续

设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域$U(x_0,\delta)$ 内有定义，若

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

则称**函数$y=f(x)$在点x_0处连续。**

令$x = x_0 + \Delta x$， 则$x \to x_0$ $(\Delta x \to 0)$

故$\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim\limits_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0$

函数$y=f(x)$在点x_0处连续 $\Longrightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$

第一节 函数的连续性

(二) 连续函数的概念

函数$y=f(x)$在x_0处连续

设函数y=$f(x)$在点x_0的某一邻域$U(x_0,\delta)$内有定义，若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, 且有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称**函数y=$f(x)$在点x_0处连续。**

- **多项式$p(x)$总是连续的，所以**

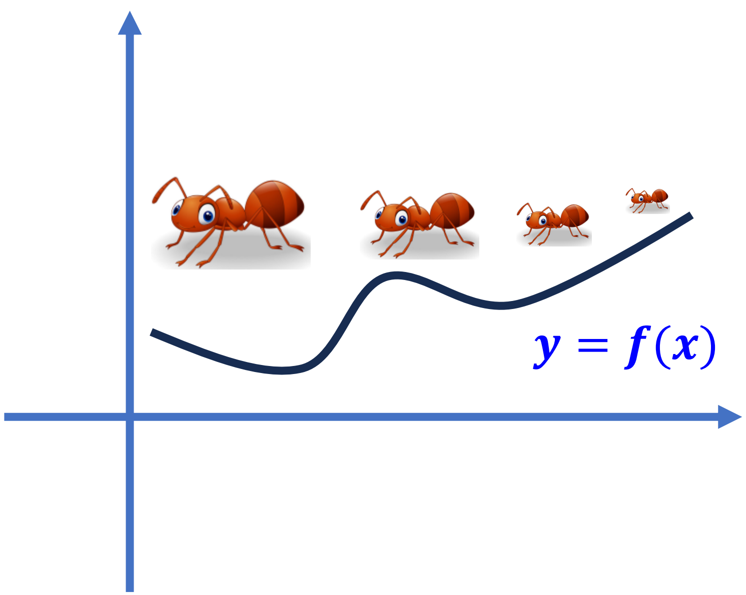
$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$$

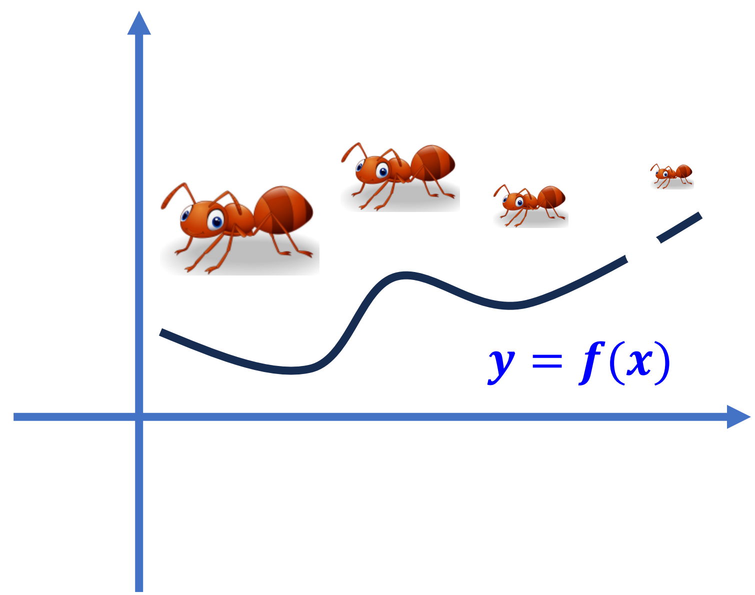
- **正弦、余弦函数总是连续的，所以**

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0 \qquad \lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$$

第一节 函数的连续性

(二) 连续函数的概念





任意大小的蚂蚁在函数图像上爬行都不会掉到函数图像的下方

第一节 函数的连续性

(二) 连续函数的概念

函数$y=f(x)$在区间[a, b]上连续

如果函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上每一点都连续，则称**函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上连续**，并称**$[a,b]$是$f(x)$的连续区间**。

- **若函数$y=f(x)$在定义域上连续，则称该函数为连续函数**

第一节 函数的连续性

(二) 连续函数的概念

常数函数 $y = C$（C是常数）

幂函数 $y = x^a$（a为实数）

$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$，定义域为$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 不是连续函数

$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$，定义域为$[0, +\infty)$

指数函数 $y = a^x$（$a > 0$且$a \neq 1$），其定义域为$(-\infty, +\infty)$

对数函数 $y = \log_a x$（$a > 0$且$a \neq 1$），其定义域为$(0, +\infty)$

三角函数

$$y = \sin x, y = \cos x$$

$$y = \tan x$$

不是连续函数

反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$

第一节 函数的连续性

(二) 连续函数的概念

课本例2 证明函数$y=x^2$在给定x_0处连续

解 设在x_0处的自变量改变量为Δx，则相应的函数改变量为

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$$

相应地

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2]=2x_0\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\left[\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\right]^2=0$$

由连续性的定义知$y=x^2$在给定x_0处连续

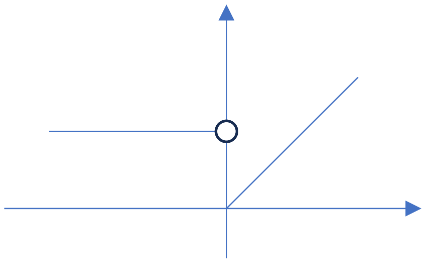
第一节 函数的连续性

（三）函数的间断点

间断点 如果函数$y=f(x)$在点x_0处不满足连续条件，则称函数$f(x)$在点x_0处不连续，或称**函数$f(x)$在点x_0处间断**，点x_0称为$f(x)$的间断点。

函数$f(x)$在点x_0处间断有三种情形

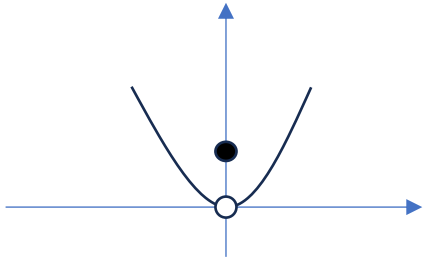
- **在点x_0处$f(x)$没有定义**　$y=f(x)=\frac{1}{x}(x\neq 0)$



- **$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在**　$f(x)=\begin{cases}1, x<0\\ x, x\geq 0\end{cases}$

- **在点x_0处$f(x)$有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$**

$$f(x)=\begin{cases}x^2, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$$



(三) 函数的间断点

课本例5 设$f(x)=\begin{cases} x-1, x<0 \\ 0, \quad\quad x=0 \\ x+1, x>0 \end{cases}$，考察函数$f(x)$在点$x=0$处的连续性

解

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x-1=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在，故$f(x)$在点$x=0$处间断

（三）函数的间断点

课本例6 设$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$，考察函数$f(x)$在点$x=1$处的连续性

解

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} x+1=2$$

$$f(1)=1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$$

故函数$f(x)$在点$x=1$处间断

第一节 函数的连续性

(四) 函数间断点的类型

- 如果函数$f(x)$在点$x=x_0$处左、右极限均存在，但不全等于$f(x_0)$，则称点$x=x_0$为**第一类间断点**；
- 如果函数$f(x)$在点$x=x_0$处的左、右极限至少有一个不存在，则称点$x=x_0$为**第二类间断点**

- 在第一类间断点中，若函数$f(x)$在$x=x_0$处**左、右极限均存在且相等**，但不等于$f(x_0)$, 即

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)\neq f(x_0)$$

或

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ 存在且有 } \lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0),$$

则称点$x=x_0$为**可去间断点**。

- 在第一类间断点中，若函数$f(x)$在$x=x_0$处**左、右极限均存在但不相等**, 即

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

则称点$x=x_0$为**跳跃间断点**。

第一节 函数的连续性

(四) 函数间断点的类型

- 如果函数$f(x)$在点$x = x_0$处左、右极限均存在，但不全等于$f(x_0)$，则称点$x = x_0$为**第一类间断点**；
- 如果函数$f(x)$在点$x = x_0$处的左、右极限至少有一个不存在，则称点$x = x_0$为**第二类间断点**

- 在第二类间断点中，如果$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$和$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$**至少有一个是**$\infty$, 则称点$x = x_0$为**无穷间断点**, e. g. ,

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{在} x = 0 \text{处}$$

- 如果$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$和$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$**均不存在且不为**$\infty$，则称点$x = x_0$为**振荡间断点**, e. g. ,

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \text{在} x = 0 \text{处}$$

第一节 函数的连续性

(四) 函数间断点的类型

可疑点

- 无定义点
- 分段函数端点

判断左右极限

- 左右极限均存在(不为无穷)但不全等于$f(x_0)$ → 第一类间断点
  - 左右极限相等但不等于$f(x_0)$ → 可去间断点
  - 左右极限不相等 → 跳跃间断点
- 左右极限至少有一个不存在 → 第二类间断点
  - 不是一个实数A
  - 左右极限至少有一个是无穷 → 无穷间断点
  - 左右极限既不存在也不是无穷 → 振荡间断点

$f(x)=\sin\frac{1}{x}$在$x=0$处

(四) 函数间断点的类型

已知$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$在点$x=1$处为间断点，判断其间断点类型

(四) 函数间断点的类型

已知$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$在点$x=1$处为间断点，判断其间断点类型

解

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x+1=2 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x+1=2$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=2\neq f(1)=1$$

在 $x=1$ 处，左右极限存在且相等，但极限不等于函数在该点的取值，故为可去间断点。

第一节 函数的连续性

(四) 函数间断点的类型

已知$f(x)=\begin{cases}x-1, x<0\\ x+1, x\geq 0\end{cases}$在点$x=0$处为间断点，判断其间断点类型

(四) 函数间断点的类型

已知$f(x)=\begin{cases}x-1,x<0\\x+1,x\geq 0\end{cases}$在点$x=0$处为间断点，判断其间断点类型

解

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x-1=-1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)=1=f(0)=1$$

在$x=0$处，左右极限存在但不相等，故为跳跃间断点。

（四）函数间断点的类型

判断$f(x)=\frac{1}{x-1}$在点$x=1$处的间断点类型

第一节 函数的连续性

(四) 函数间断点的类型

判断$f(x)=\frac{1}{x-1}$在点$x=1$处的间断点类型

解 $$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=\infty$$

在$x=0$处，左右极限至少有一个为无穷大，故为无穷间断点。

第二节 连续函数的运算法则

有限四则运算不改变函数的连续性：如果函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0处连续，则这两个函数

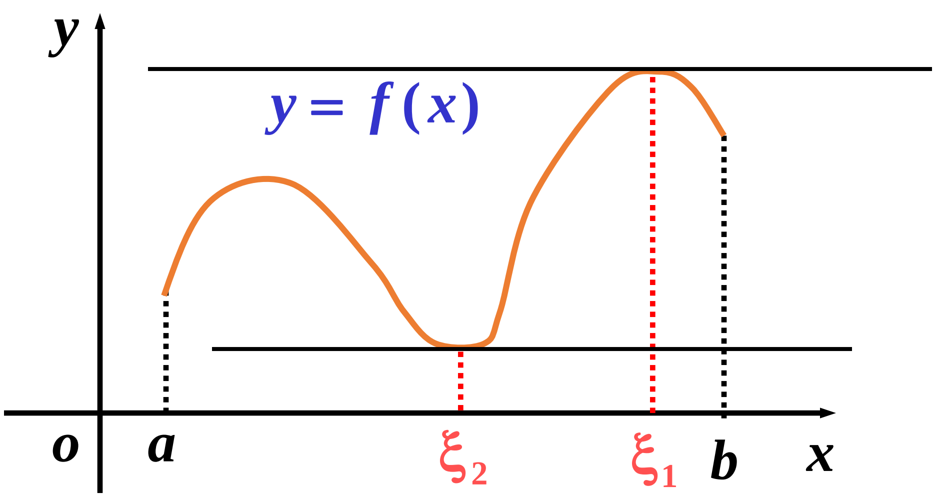
- **和**：$f(x) + g(x)$
- **差：**$f(x) + g(x)$
- **积：**$f(x) \cdot g(x)$
- **商：**$\frac{f(x)}{g(x)}\,(g(x_0) \neq 0)$

均在点x_0处连续

第三节 闭区间连续函数的性质

(一) 最大值与最小值定理

- 如果函数$y = f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则$f(x)$在这个区间上有界；
- 如果函数$y = f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则它在这个区间上一定有最大值与最小值

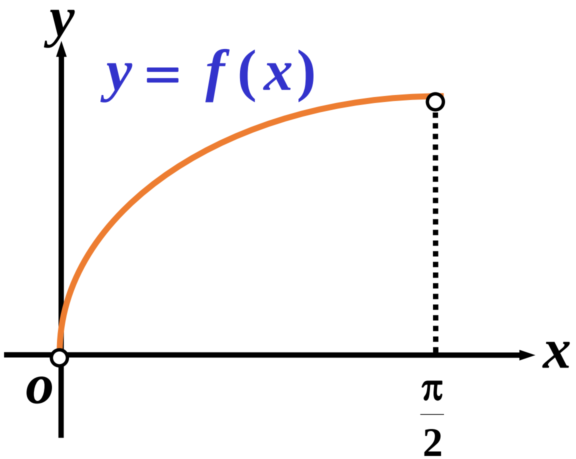


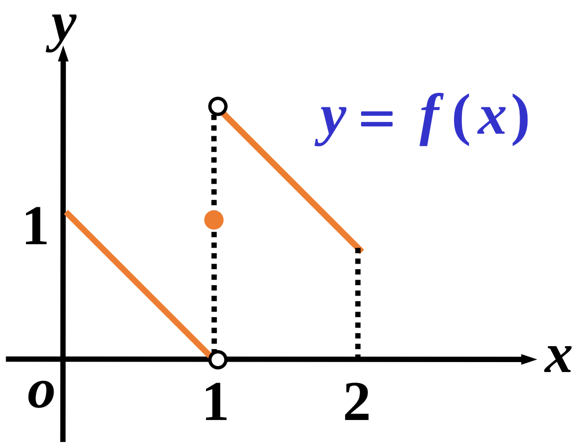
第三节 闭区间连续函数的性质

(一) 最大值与最小值定理

- 如果函数$y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在这个区间上有界；
- 如果函数$y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则它在这个区间上一定有最大值与最小值

- 若区间是开区间，定理不一定成立；
- 若区间内有间断点，定理不一定成立。

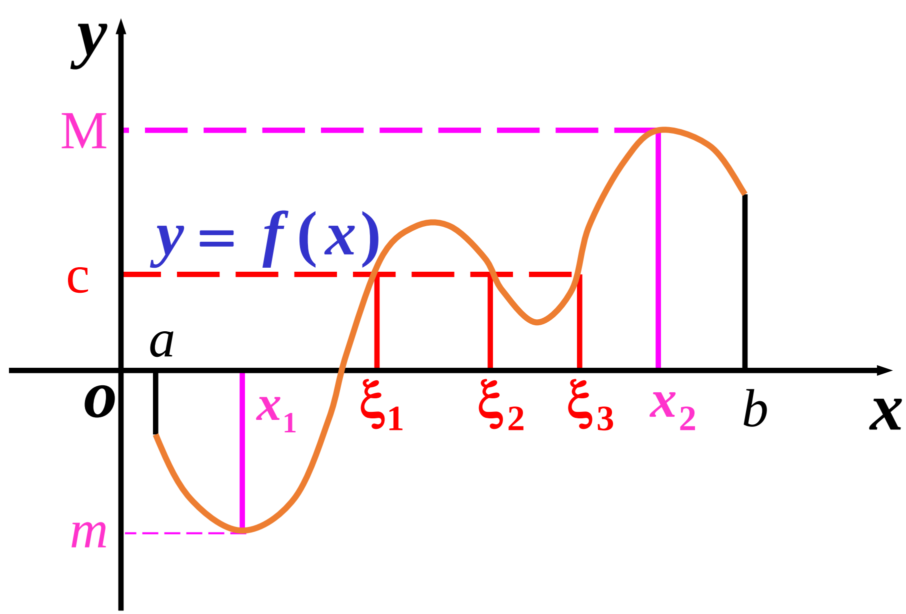




第三节 闭区间连续函数的性质

(一) 介值定理

- 如果函数$y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，m和M分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值，则对介于m和M之间的任一实数c（即$m<c<M$），至少存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得$c=f(\xi)$

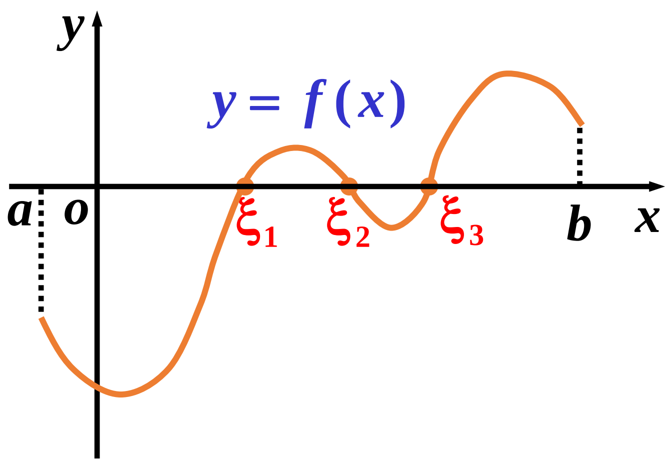


直线y $=c$与曲线$y=f(x)$至少存在一个交点

第三节 闭区间连续函数的性质

(一) 介值定理

- 如果函数$y = f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号，则至少存在一点$\xi \in (a, b)$使得$f(\xi) = 0$.



连续曲线$y = f(x)$的两个端点分别位于x轴的两侧，则该曲线与x轴至少有一个交点

第四节 利用函数连续性求函数极限

(一) 连续函数与极限

函数$y=f(x)$在x_0处连续

设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域$U(x_0,\delta)$ 内有定义，若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, 且有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称**函数$y=f(x)$在点x_0处连续。**

若函数$y=f(x)$在点x_0处连续, 函数在该点的极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$就是函数在该点的取值$f(x_0)$

第四节 利用函数连续性求函数极限

(一) 连续函数与极限

若函数$y=f(x)$在点x_0处连续, 则有

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x^2}\cos x}{x^2+1}$

解: $f(x) = \dfrac{e^{x^2}\cos x}{x^2+1}$ 在$x=0$处连续

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x^2}\cos x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}\cos x}{x^2+1} = f(0) = \dfrac{e^{0^2}\cos 0}{0^2+1} = 1$

第四节 利用函数连续性求函数极限

(一) 连续函数与极限

若函数$y=f(x)$在点x_0处连续，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

课本例12 求$\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$

连续函数中极限符号与函数符号可以交换

第四节 利用函数连续性求函数极限

（二）利用函数连续性求单侧极限

设有函数$y = h(x) = \begin{cases} f(x), x \geq a \\ g(x), x < a \end{cases}$，若$\boldsymbol{g(x)}$在$\boldsymbol{a}$处连续，则

$$\lim_{x \to a^-} h(x) = \lim_{x \to a^-} g(x) = \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

类似地， 若$\boldsymbol{f(x)}$在$\boldsymbol{a}$处连续，则

$$\lim_{x \to a^+} h(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

例 设$h(x) = \begin{cases} x+1, x \geq 1 \\ x-1, x < 1 \end{cases}$，求$\lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$

解： $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x - 1$　　记$g(x) = x - 1, g(x)$在$x = 1$处连续

故$\lim\limits_{x \to 1^-} x - 1 = \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} g(x) = g(1) = 1 - 1 = 0$

因此$\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x - 1 = 0$