微积分I

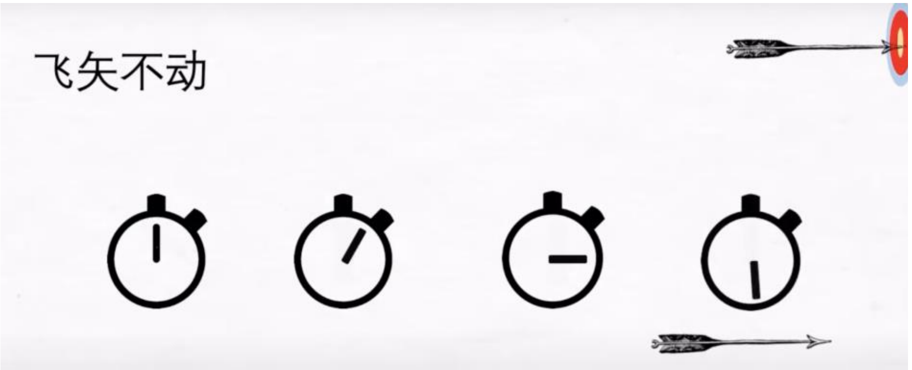
3学分、外招

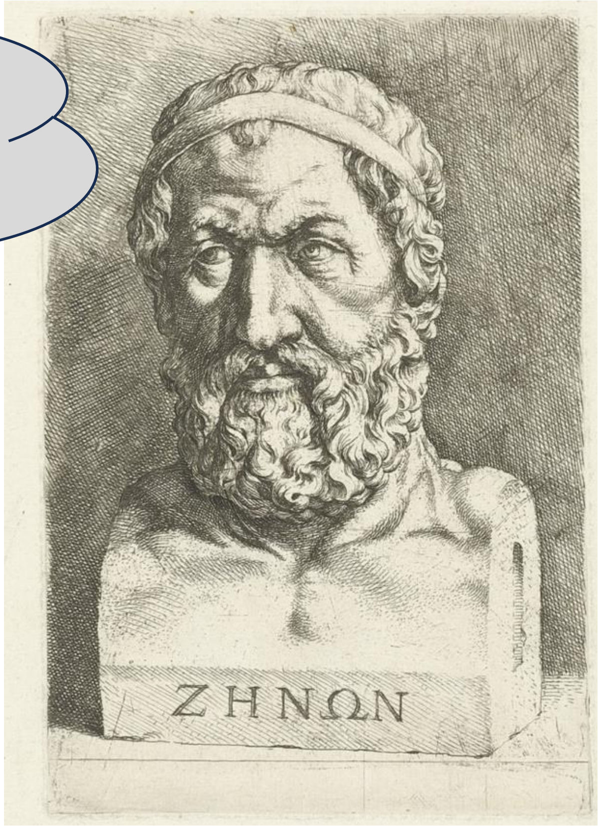
第三章 导数与微分

数学系王伟文

芝诺悖论

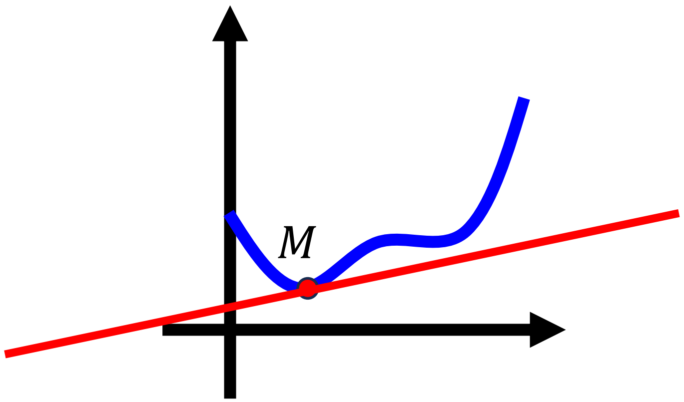
“一支飞行的箭是静止的。由于每一时刻这支箭都有其确定的位置因而是静止的，因此箭就不能处于运动状态。”



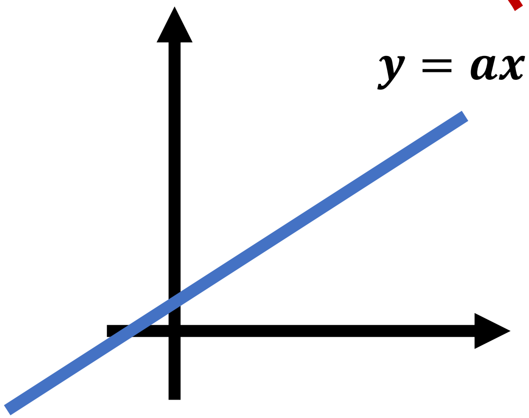


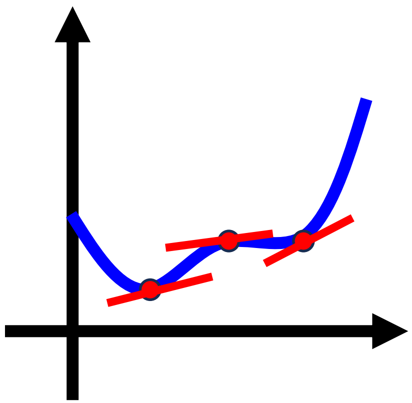
导数：即切线斜率

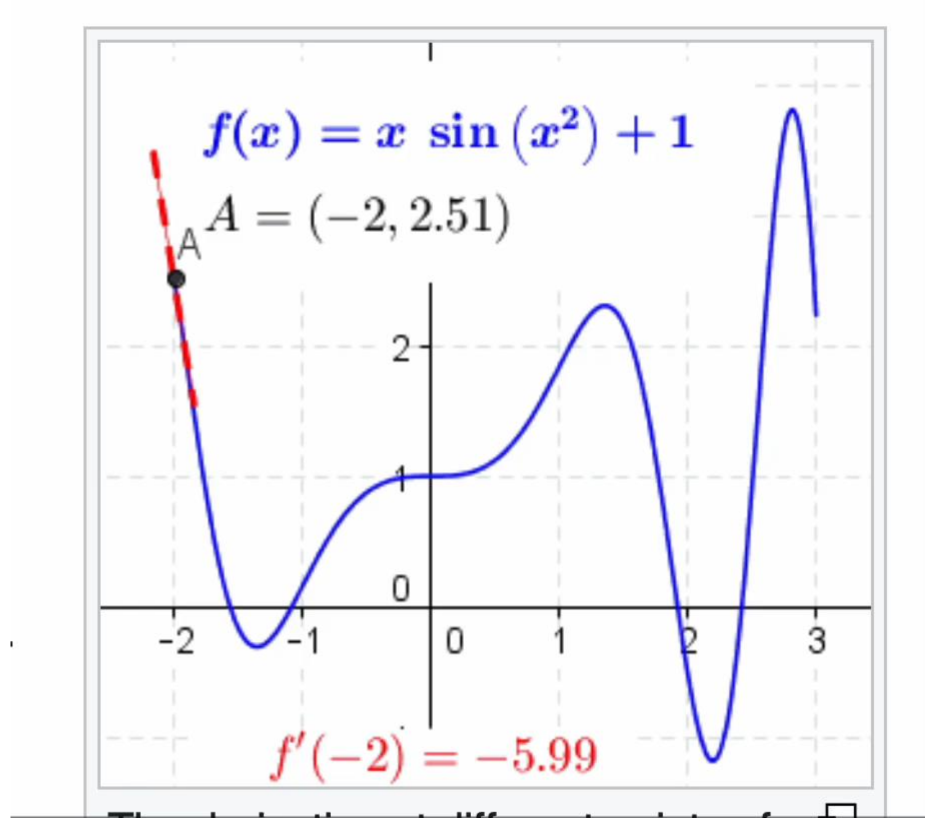
切线：与函数图像相交与点M，且斜率与函数在该点处导数相同的直线



导数：即切线斜率

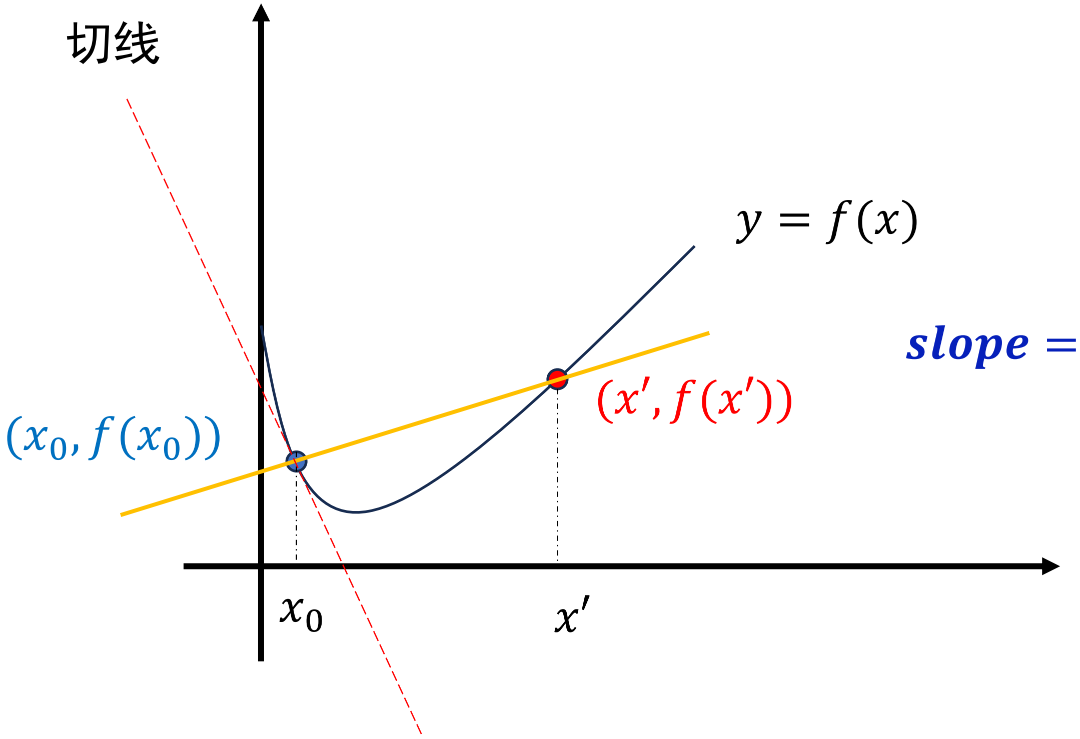






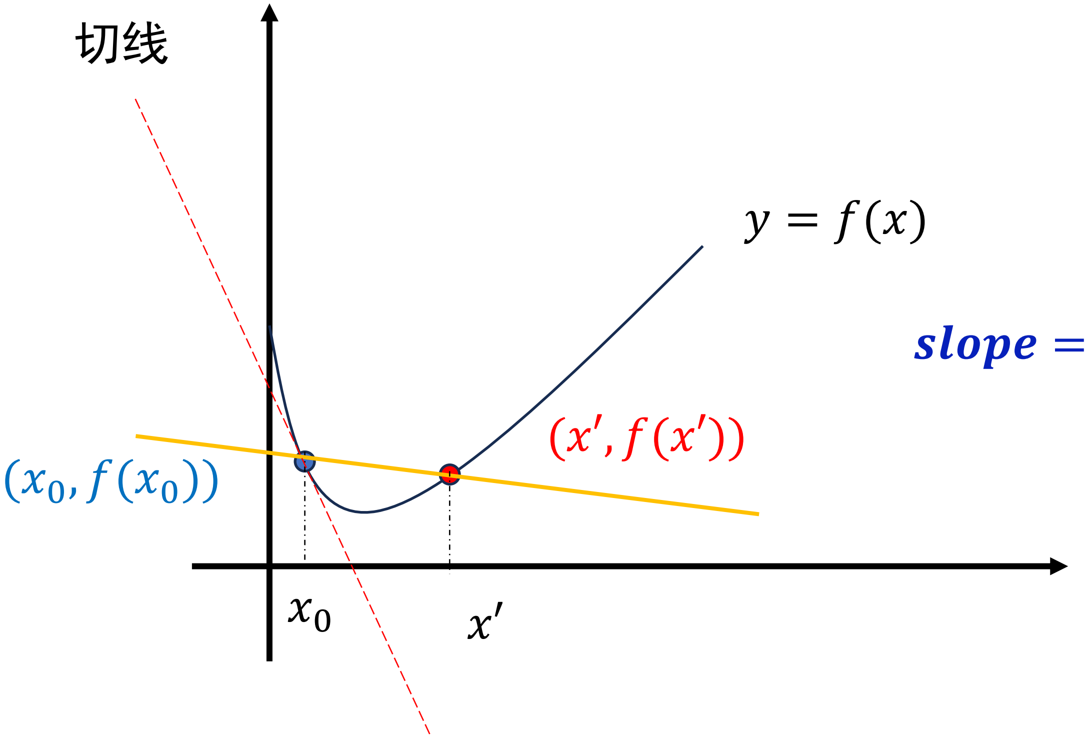
经济学中，所谓**边际**和**弹性**的概念与导数紧密相关。比如边际成本就是产量增加一个单位所带来的成本的增加，若将其连续化，得到的便是成本函数的导数。又如需求的弹性是指价格变化一个单位时，需求量的变化，连续化后相应的也是需求函数关于价格的导数

导数：即切线斜率



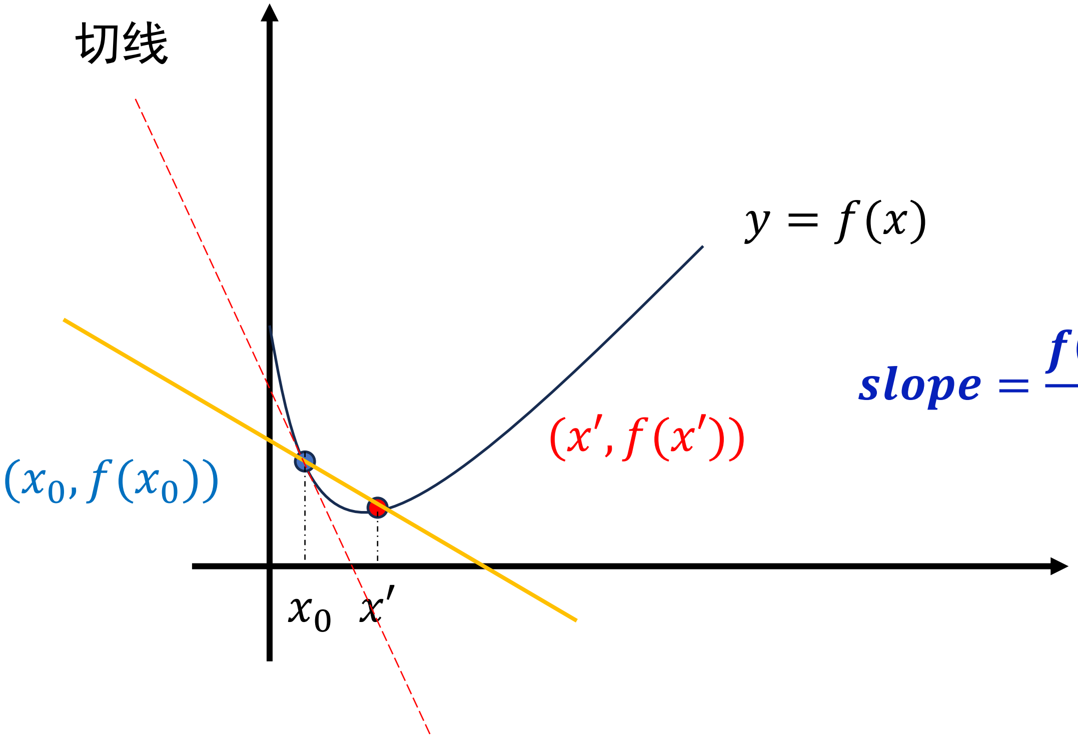
$$\boldsymbol{slope = \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}}$$

导数：即切线斜率



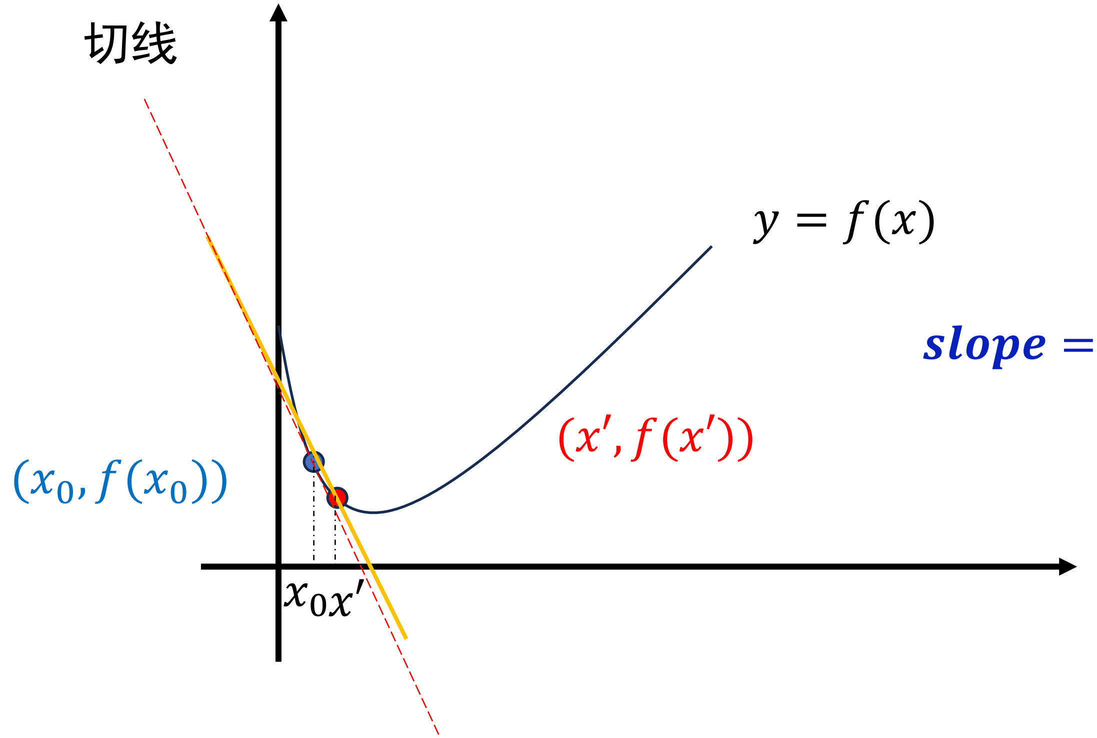
$$\boldsymbol{slope = \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}}$$

导数：即切线斜率



$$\boldsymbol{slope = \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}}$$

导数：即切线斜率



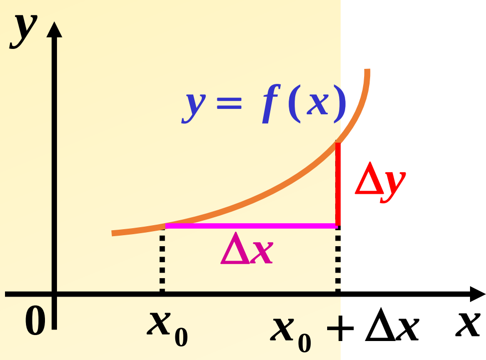
$$\boldsymbol{slope = \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}}$$

第一节 导数的概念

(一) 导数的定义

设函数$f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，当自变量在点x_0处取得**改变量$\Delta x(\neq 0)$**时，函数$f(x)$取得相应的改变量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$



如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此**极限为函数$f(x)$在点x_0处的导数。**

记为

$$f'(x_0) \qquad y'|_{x=x_0} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \qquad \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=x_0}$$

第一节 导数的概念

(一) 导数的定义

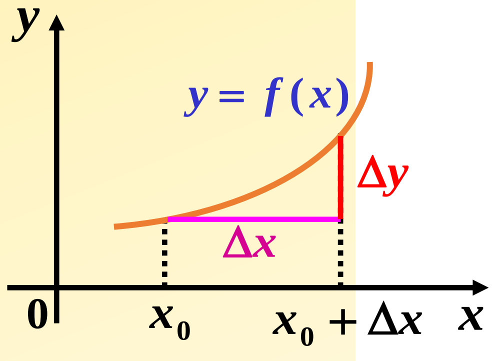
设函数$f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，当自变量在点x_0处取得**改变量$\Delta x(\neq 0)$**时，函数$f(x)$取得相应的改变量

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此**极限为函数$f(x)$在点x_0处的导数。**



- 如果函数$f(x)$在点x_0处有导数，则称函数$f(x)$在点x_0处可导，否则在点x_0处不可导
- 如果函数$f(x)$在某个区间(a,b)内每一点都可导，则称函数$f(x)$在区间(a,b)内可导
- 若函数$f(x)$在(a,b)内每一点都可导，则对于每一点$x\in(a,b)$, 都存在其导数$f'(x)$与之对应，此时$f'(x)$构成定义在区间(a,b)上的导函数

第一节 导数的概念

(二) 由导数定义求导步骤

求函数$y=f(x)$在x_0处的导数

(1) 求出对应于自变量改变量Δx的函数改变量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

(2) 作出自变量改变量与函数改变量的比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(3) 求$\Delta x\to 0$时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

第一节 导数的概念

(二)由导数定义求导步骤

课本例3 求函数$y=\frac{1}{x}$在$x=x_0$处的导数

解： 设自变量相对于x_0的改变量为Δx，此时相应的函数改变量Δy为

$$\Delta y=\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}=\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{(x_0+\Delta x)x_0}=\frac{-\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0}$$

计算函数改变量

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0\cdot\Delta x}=-\frac{1}{(x_0+\Delta x)x_0}$$

算比值

$$y'|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{1}{(x_0+\Delta x)x_0}$$

$$=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}-1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(x_0+\Delta x)x_0}=-\frac{1}{x_0^2}$$

求极限

第一节 导数的概念

(三) 由导数定义的等价形式

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

令$x = x_0 + \Delta x$, 当$\Delta x \to 0$时, $x \to x_0$

因此有

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(四) 导数的几何意义

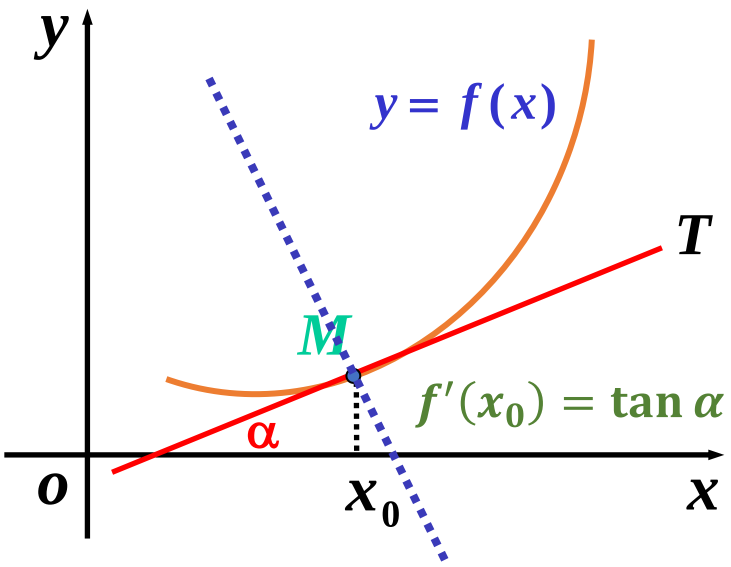
在几何上，函数$y=f(x)$在点x_0处的**导数$f'(x_0)$**表示**曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率**，即$f'(x_0)=\tan\alpha$, 其中α为切线的倾角

经过点$M(x_0,f(x_0))$的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x_0-x)$$

经过点$M(x_0,f(x_0))$的法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x_0-x)$$



第一节 导数的概念

(四) 左、右导数

设函数$f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，

- 如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，则称之为$f(x)$在点$x_0$处的**左导数**，记作$f'_-(x_0)$；
- 如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，则称之为$f(x)$在点$x_0$处的**右导数**，记作$f'_+(x_0)$；

函数$f(x)$在点x_0处的导数存在，当且仅当$f(x)$在点x_0处的左、右导数存在且相等，即

$$f'(x_0)=A \iff f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$$

第一节 导数的概念

(四) 可导与连续的关系

定理 如果函数$y = f(x)$在点x_0处可导，则它在点x_0处一定连续

- 在点x_0处可导，则必在点x_0处连续
- 在点x_0处不连续，则在点x_0处必不可导
- 在点x_0处连续，无法判断在点x_0处是否可导

熟记!!!

第一节 导数的概念

(四) 可导与连续的关系

课本例8 讨论函数$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$在$x=0$处的连续性及可导性

解：$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=\lim_{x\to 0} x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$$

因此函数$f(x)$在$x=0$处连续

第一节 导数的概念

(四) 可导与连续的关系

课本例8 讨论函数$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$在$x=0$处的连续性及可导性

解： 先考察左导数

$$\boldsymbol{f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

再考察右导数

$$\boldsymbol{f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$ 因此函数$f(x)$在$x=0$处不可导

综上所述，函数$f(x)$在$x=0$处连续，但不可导

第一节 导数的概念

(四) 可导与连续的关系

课本例9 讨论函数$y = f(x) = \begin{cases} x-1, & x \le 0 \\ 2x, & 0 < x \le 1 \\ x^2+1, & 1 < x \le 2 \\ \frac{1}{2}x+4, & x \ge 2 \end{cases}$在$x=0, x=1$及$x=2$处的连续性及可导性

解： 在点$x=0$处

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x-1) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \ne \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

不连续点处必不可导!!!

因此，$\lim_{x \to 0} f(x)$不存在，所以$f(x)$在点$x=0$处不连续，进而在该点处不可导

第一节 导数的概念

(四) 可导与连续的关系

课本例9 讨论函数$y=f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0 \\ 2x, & 0<x\le 1 \\ x^2+1, & 1<x\le 2 \\ \frac{1}{2}x+4, & x\ge 2 \end{cases}$在$x=0, x=1$及$x=2$处的连续性及可导性

解： 在点$x=1$处

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 2x=2 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

因此， $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在， 且$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2=f(1)$

所以$f(x)$在点$x=1$处连续

第一节 导数的概念

(四) 可导与连续的关系

课本例9 讨论函数$y = f(x) = \begin{cases} x-1, & x \le 0 \\ 2x, & 0 < x \le 1 \\ x^2+1, & 1 < x \le 2 \\ \frac{1}{2}x+4, & x \ge 2 \end{cases}$在$x = 0, x = 1$及$x = 2$处的连续性及可导性

解： 在点$x = 1$处先考察左导数

$$f'_-(1) = \lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

再考察右导数

$$f'_+(1) = \lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{x^2+1-2}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^-}(x+1) = 2$$

$f'_+(1) = f'_-(1) = 2$　　$f(x)$在点$x = 1$处可导且$f'(1) = 2$

第二节 导数的基本公式

(一) 基本初等函数的导数

熟记!!!

常数函数 $y = C$ $y' = (C)' = 0$

幂函数 $y = x^a$ $y' = (x^a)' = a \cdot x^{a-1}$

对数函数 $y = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$ $y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$

特别地，若 $y = \ln x$ 则 $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

指数函数 $y = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$ $y' = (a^x)' = a^x \cdot \ln a$

特别地，若 $y = e^x$ 则 $y' = (e^x)' = e^x$

第二节 导数的基本公式

(一) 基本初等函数的导数

熟记!!!

三角函数

$y = \sin x$ $\quad$ $y' = (\sin x)' = \cos x$

$y = \cos x$ $\quad$ $y' = (\cos x)' = -\sin x$

$y = \tan x$ $\quad$ $y' = (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

反三角函数

$y = \arcsin x(-1 < x < 1)$ $\quad$ $y' = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (-1 < x < 1)$

$y = \arccos x(-1 < x < 1)$ $\quad$ $y' = (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (-1 < x < 1)$

$y = \arctan x$ $\quad$ $y' = (\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

$y = \operatorname{arccot} x$ $\quad$ $y' = (\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

第二节 导数的基本公式

(二) 函数四则运算的导数

代数和的导数　　设函数$f(x)$和$g(x)$均是可导函数，则$f(x) \pm g(x)$也是可导函数，且

$$[f(x) \pm g(x)]' = [f(x)]' \pm [g(x)]'$$

例 求函数$y = e^x + \frac{1}{x} - \sin x$的导数

解：

$$y' = \left(e^x + \frac{1}{x} - \sin x\right)'$$

$$= (e^x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' - (\sin x)'$$

$$= e^x + (-1)x^{-1-1} - \cos x$$

$$= e^x - x^{-2} - \cos x$$

(二) 函数四则运算的导数

乘积的导数 设函数$f(x)$和$g(x)$均是可导函数，则$f(x)\cdot g(x)$也是可导函数，且

$$[f(x)\cdot g(x)]' = [f(x)]'\cdot g(x) + f(x)\cdot [g(x)]'$$

特别地，若C为常数，则 $[C\cdot f(x)]' = C\cdot [f(x)]'$

例 求函数$y=\frac{1}{x}e^x$的导数

解：

$$y' = \left(\frac{1}{x}e^x\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)'\cdot e^x + \frac{1}{x}\cdot (e^x)'$$

$$= (-1)x^{-1-1}\cdot e^x + \frac{1}{x}\cdot e^x$$

$$= -x^{-2}e^x + \frac{1}{x}\cdot e^x$$

第二节 导数的基本公式

(二) 函数四则运算的导数

商的导数

设函数$f(x)$和$g(x)$均是可导函数，且$g(x) \neq 0$，则$\frac{f(x)}{g(x)}$也是可导函数，且

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{[f(x)]' \cdot g(x) - f(x) \cdot [g(x)]'}{[g(x)]^2}$$

例 求函数$y = \frac{\cos x}{x^2}$的导数

解：

$$y' = \left(\frac{\cos x}{x^2}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot x^2 - \cos x \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{-\sin x \cdot x^2 - \cos x \cdot (2x^{2-1})}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{-\sin x \cdot x^2 - 2x \cdot \cos x}{x^4}$$