微积分I 3学分、外招

第三章 导数与微分

数学系王伟文

第一节 复合函数求导公式

设函数$y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，y是x的一个复合函数$y = f[\varphi(x)]$。如果在点x处， $u = \varphi(x)$有导数

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(x)$$

在x的对应点u处，$y = f(u)$有导数

$$\frac{dy}{du} = f'(u)$$

则复合函数$y = f[\varphi(x)]$在点x处导数$\frac{dy}{dx}$(或y'_x)存在。

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

$$= f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

第一节 复合函数求导公式

$y = f[\varphi(x)]$ $\longrightarrow$ $\dfrac{dy}{dx} = y'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x)$

$= f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

课本例6 求函数$y = (1+2x)^2$的导数

解： 记$y = f(u) = u^2$，$u = \varphi(x) = 1 + 2x$

由复合函数求导公式

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x) = (u^2)' \cdot (1+2x)' = 2u \cdot 2$$

$$= 2(1+2x) \cdot 2$$

$$= 4 + 8x$$

第一节 复合函数求导公式

$$y = f[\varphi(x)] \longrightarrow \frac{dy}{dx} = y'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

$$= f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

课本例7 求函数$y = \ln \sin x$的导数

解： 记$y = f(u) = \ln u$， $u = \varphi(x) = \sin x$

由复合函数求导公式

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x) = (\ln u)' \cdot (\sin x)' = \frac{1}{u} \cdot \cos x$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$$

$$= \frac{1}{\tan x} = \cot x$$

第一节 复合函数求导公式

$$\frac{dy}{dx}=(f[\varphi(x)])'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

f对整体求导×整体对x求导

例 求函数$y=\sin 2x$的导数

解：$y'=\frac{dy}{dx}=(\sin 2x)'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x$

例 求函数$y=\sqrt{x^2+1}$的导数

解：
$$y'=\frac{dy}{dx}=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(x^2+1)'$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x)$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

第一节 复合函数求导公式

$$\frac{dy}{dx} = (f[\varphi(x)])' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

f对整体求导×整体对x求导

课本例9 求函数$y = \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$的导数

解： $$y' = \left[\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n\right]'$$

$$= n\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{x}{2x+1}\right)'$$

$$= n\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n-1} \cdot \frac{(x)' \cdot (2x+1) - x \cdot (2x+1)'}{(2x+1)^2}$$

$$= n\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot (2x+1) - x \cdot 2}{(2x+1)^2}$$

$$= n\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{(2x+1)^2} = \frac{nx^{n-1}}{(2x+1)^{n+1}}$$

第一节 复合函数求导公式

$$\frac{dy}{dx} = (f[\varphi(x)])' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

f对整体求导×整体对x求导

求函数$y = \ln(1+\sqrt{x^2})$ 的导数

第一次复合函数求导

解： $y' = \left[\ln\left(1+\sqrt{x^2}\right)\right]' = \frac{1}{1+\sqrt{x^2}} \cdot (1+\sqrt{x^2})'$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{x^2}} \cdot [(1)' + (\sqrt{x^2})']$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{x^2}} \cdot [0 + (\sqrt{x^2})']$$

第二次复合函数求导

$$= \frac{1}{1+\sqrt{x^2}} \cdot [\frac{1}{2}\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2)']$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{x^2}} \cdot [\frac{1}{2}\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2x]$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

第一节 复合函数求导公式

复合函数求导公式可以推广到有限次复合，例如

$$y = f(u)，u = \varphi(v)，v = \psi(x)$$

则复合函数$y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$在点$x$处导数

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot \psi'(x)$$

第二节 反函数求导公式

设函数$y=f(x)$在点x处有不等于零的导数$f'(x)$, 并且其反函数$x=f^{-1}(y)$在点x的对应点y处连续，则$[f^{-1}(y)]'$存在，并且

$$[f^{-1}(y)]'=\frac{1}{f'(x)}$$

或

$$f'(x)=\frac{1}{[f^{-1}(y)]'}$$

原函数$y=f(x)$与其反函数$x=f^{-1}(y)$的导数互为倒数

第二节 反函数求导公式

	原函数	反函数
	$y=\log_a x\,(a>0\text{且}a\neq 1)$	$x=a^y\ (a>0\text{且}a\neq 1)$
导数	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(a^y)'=a^y\cdot\ln a$

$$f'(x)=\frac{1}{[f^{-1}(y)]'}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{a^y\cdot\ln a}=\frac{1}{(a^y)'}$$

第二节 反函数求导公式

原函数 反函数

$y = \arcsin x (-1 < x < 1)$ $x = \sin y \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$

导数 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\sin y)' = \cos y$

$$f'(x) = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}} = \frac{1}{|\cos y|} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{(\sin y)'}$$

第三节 隐函数的导数

如果一个已知的**二元方程**$F(x,y)=0$确定了一个函数$y=f(x)$, 则称该函数为**隐函数**。

- 如$F(x,y)=x^2+xy+y^2-4=0$，确定了对应法则f未知（“隐”的含义）的一个函数 $y=f(x)$，称之为隐函数；注意不是说 $F(x,y)$ 是隐函数。
- 隐函数求导，即在对应法则f未知的情形下，利用已知的方程$F(x,y)=0$，求得导数$y'=f'(x)$

不知道函数表达式也能对函数求导？！

第三节 隐函数的导数

例 求由方程$x^2+y^2=a^2$所确定的隐函数$y=f(x)$的导数

解： 已知y可以表示为x的函数，即$y=f(x)$

因此，方程$x^2+y^2=a^2$可以改写为

$$x^2+[f(x)]^2=a^2$$

上述方程两端同时对x求导数

$$(x^2+[f(x)]^2)'=(a^2)'$$

等式两端同时对相同的变量求导不会改变等号

等式左边$=(x^2)'+\{[f(x)]^2\}'=2x+2f(x)\cdot f'(x)$

等式右边$(a^2)'=0$

即 $2x+2f(x)\cdot f'(x)=0$ 解得$f'(x)=-\dfrac{x}{f(x)}=-\dfrac{x}{y}$

第三节 隐函数的导数

课本例15 方程 $y = x\ln y$确定y是x的函数，求y的导数。

解： 已知y可以表示为x的函数，即$y = f(x)$

因此，方程可以$y = x\ln y$改写为

$$f(x) = x \cdot \ln f(x)$$

上述方程两端同时对x求导数

$$[f(x)]' = [x \cdot \ln f(x)]'$$

等式两端同时对相同的变量求导不会改变等号

等式左边$= [f(x)]' = f'(x)$

等式右边$[x \cdot \ln f(x)]' = (x)' \cdot \ln f(x) + x \cdot [\ln f(x)]' = \ln f(x) + x \cdot \frac{1}{f(x)} f'(x)$

即 $f'(x) = \ln f(x) + x \cdot \frac{1}{f(x)} f'(x)$ 解得$f'(x) = \frac{f(x) \cdot \ln f(x)}{f(x) - x} = \frac{y \cdot \ln y}{y - x}$

第三节 隐函数的导数

课本例15 方程 $y = x\ln y$确定y是x的函数，求y的导数。

解：已知y可以表示为x的函数，即$y = f(x)$

因此，方程可以$y = x\ln y$改写为

$$f(x) = x \cdot \ln f(x)$$

上述方程两端同时对x求导数

等式两端同时对相同的变量求导不会改变等号

$$[f(x)]' = [x \cdot \ln f(x)]'$$

等式左边$= [f(x)]' = f'(x)$

等式右边$[x \cdot \ln f(x)]' = (x)' \cdot \ln f(x) + x \cdot [\ln f(x)]' = \ln f(x) + x \cdot \frac{1}{f(x)} f'(x)$

即 $f'(x) = \ln f(x) + x \cdot \frac{1}{f(x)} f'(x)$ 解得$f'(x) = \frac{f(x)\cdot\ln f(x)}{f(x)-x} = \frac{y\cdot\ln y}{y-x}$

取$y = f(x)$代入原方程

对原方程两端同时关于x求导

求导后，将y的导数即$f'(x)$视未知数求解

在上述求解结果中再将$f(x)$替换为y

第四节 取对数求导法

设函数$y=f(x)$，如果对应法则f很复杂，在求解导数y'（或$f'(x)$）的过程中，**可以先对函数左右两端取对数**，即

$$\ln y=\ln f(x)$$

然后通过隐函数求导的方法，求解y'（或$f'(x)$），此方法称为**"取对数求导法"**

- **适用范围：用乘、除、根式表达比较复杂的函数以及幂指函数的情形$u(x)^{v(x)}$**

$$y=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x} \qquad y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}} \qquad y=x^x$$

对数公式

$$\ln a^b=b\cdot\ln a$$

$$\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b \qquad \ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$$

第四节 取对数求导法

课本例21 求$y=(3x+1)^2\sqrt[5]{\frac{x^2+1}{5x-1}}$的导数。

解： 对函数左右两端取自然对数，即

$$\ln y=\ln\left[(3x+1)^2\sqrt[5]{\frac{x^2+1}{5x-1}}\right]$$

$$\ln y=2\ln(3x+1)+\frac{1}{5}\ln\frac{x^2+1}{5x-1}$$

$$=2\ln(3x+1)+\frac{1}{5}[\ln\left(x^2+1\right)-\ln(5x-1)]$$

记$y=f(x)$，代入上式

$$\ln f(x)=\ 2\ln(3x+1)+\tfrac{1}{5}[\ln\left(x^2+1\right)-\ln(5x-1)]$$

两边对x求导 $$\frac{1}{f(x)}f'(x)=\frac{6}{3x+1}+\frac{2x}{5(x^2+1)}-\frac{1}{5x-1}$$

解得

$$f'(x)=f(x)\cdot\left[\frac{6}{3x+1}+\frac{2x}{5(x^2+1)}-\frac{1}{5x-1}\right]=(3x+1)^2\sqrt[5]{\frac{x^2+1}{5x-1}}\cdot\left[\frac{6}{3x+1}+\frac{2x}{5(x^2+1)}-\frac{1}{5x-1}\right]$$

第四节 取对数求导法

课本例20 求$y = x^x$的导数。

解： 对函数左右两端取自然对数，即

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

记$y = f(x)$，代入上式

$$\ln f(x) = x \ln x$$

两边对x求导

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)'$$

$$= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

解得

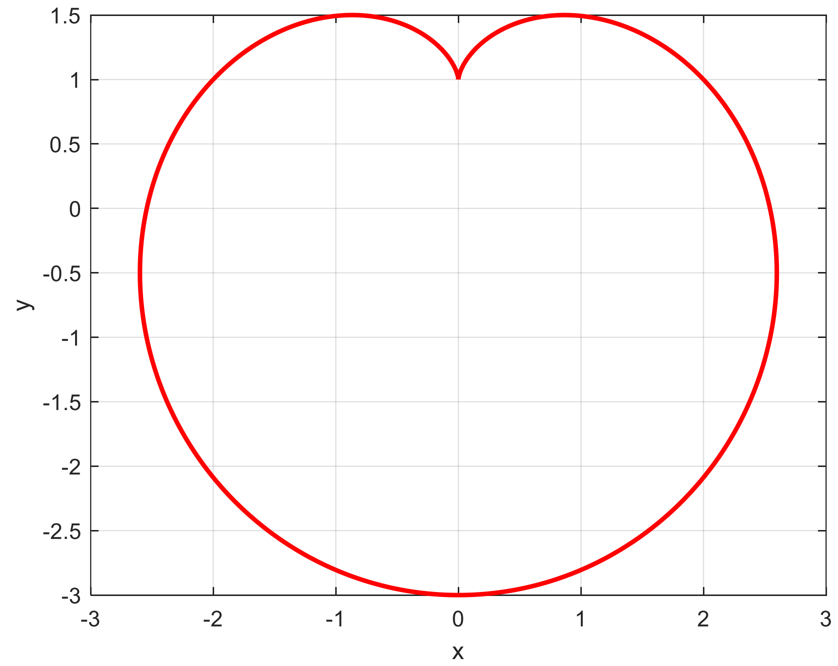
$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln x + 1)$$

$$= x^x \cdot (\ln x + 1)$$

第五节 由参数方程所确定的函数导数

若**参数方程** $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定y是x的函数，则称此函数关系为由参数方程所确定的函数。

$$\begin{cases} x = 2(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t) \\ y = 2(\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t) \end{cases}, (0 \le t \le 2\pi)$$



第五节 由参数方程所确定的函数导数

若参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$确定$y$是$x$的函数，则称此函数关系为由参数方程所确定的函数。

- 设$x = \varphi(t)$有连续的反函数$t = \varphi^{-1}(x)$, 同时$\varphi'(t)$和$\psi'(t)$存在，且$\psi'(t) \neq 0$, 由参数方程y与x构成复合函数$y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$

利用反函数求导与复合函数求导法则，有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

第五节 由参数方程所确定的函数导数

课本例22 已知$\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$, 求$\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

解:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = 2t$$