微积分I

3学分、外招

第三章 导数与微分

数学系王伟文

第一节 高阶导数

设函数$f(x)=x^4$ 则$f'(x)=4x^3$

$f'(x)=4x^3$仍然是关于x的函数

这个函数再对x求导数

$$(f'(x))'=(4x^3)'=12x^2$$

$(f'(x))'$可以记为$f''(x)$或$f^{(2)}(x)$，称为**函数$f(x)$关于x的二阶导数**

类似地，对二阶导数进一步关于x求导数

$$[f^{(2)}(x)]'=\left(12x^2\right)'=24x$$

$[f^{(2)}(x)]'$可以记为$f'''(x)$或$f^{(3)}(x)$,称为**函数$f(x)$关于x的三阶导数**

若对函数$f(x)$上述求导过程重复n次，即得到该函数**n阶导数**，记作

$$\boldsymbol{f^{(n)}(x)，y^{(n)}} \quad \textbf{或} \frac{d^n y}{dx^n}$$

第一节 高阶导数

求函数$y=x^2+2x$的二阶导数

解：
$$y'=(x^2+2x)'$$
$$=2x+2$$

$$y^{(2)}=(2x+2)'$$
$$=(2x)'+(2)'$$
$$=2+0$$
$$=2$$

第一节 高阶导数

求函数$y=\ln x$的二阶导数

解：

$$y' = (\ln x)'$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$y^{(2)} = (\frac{1}{x})'$$

$$= (x^{-1})'$$

$$= -1 \cdot x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$$

第一节 高阶导数

例 求函数$y = xe^x$的二阶导数

解：
$$y' = (xe^x)'$$
$$= (x)'e^x + x(e^x)'$$
$$= e^x + xe^x$$

$$y^{(2)} = (e^x + xe^x)'$$
$$= (e^x)' + (xe^x)'$$
$$= e^x + e^x + xe^x$$
$$= 2e^x + xe^x$$

第二节 微分

对于自变量在点x处的改变量Δx, 如果函数$y=f(x)$的相应改变量Δy可以表示为

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)\qquad(\Delta x\to 0)$$

其中常数A与Δx无关，则称函数$y=f(x)$在点x处**可微**，**并称$A\cdot\Delta x$为函数$y=f(x)$在点x处的微分**，记为dy或$df(x)$，即

$$dy = A\cdot\Delta x$$

怎么确定常数A?

第二节 微分

设函数$y=f(x)$在点x处可微，则

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\qquad(\Delta x\to 0)$$

A即为函数$f(x)$在点x处的导数$f'(x)$

等式两端同时除Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

取极限，令$\Delta x\to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)$$

又因为$o(\Delta x)$是Δx的高阶无穷小，即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A$$

故$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)=A$

第二节 微分

设函数$y=f(x)$在点x处可导，即$f'(x)$存在，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

由极限存在的性质，知

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$$

函数$f(x)$在点x处的导数$f'(x)$即为微分式中的A

其中α□$\Delta x\to \mathbf{0}$的无□小量。所以

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$$

又因为$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$，故$\alpha\cdot\Delta x$为$\Delta x$的高阶无穷小（$\Delta x\to \mathbf{0}$），记为$o(\Delta x)$，

从而有

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)\quad (\Delta x\to 0)$$

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\quad (\Delta x\to 0)$$

根据微分定义，因此有

$$dy=f'(x)\Delta x$$

第二节 微分

等价

设函数$y=f(x)$在点x处可微 $\Longleftrightarrow$ 函数$y=f(x)$在点x处可导

$$dy = A\cdot\Delta x \qquad f'(x)=A$$

$y=f(x)$在点x处的微分可以表示为

$$\boxed{dy = f'(x)\cdot\Delta x}$$

第二节 微分

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

令$y = x$，则

$$dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$$

所以$y = f(x)$在点x处的微分可以表示为

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

第二节 微分

课本例2 求函数$y = \ln x$的微分

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

解： 函数$y = \ln x$的导数为

$$y' = \frac{1}{x}$$

所以微分为

$$dy = \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$dy = (\ln x)' dx$$

$$= \frac{1}{x} \cdot dx$$

第二节 微分

例 求函数$y = x^2 + 2x$的微分

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

解： 函数$y = x^2 + 2x$的导数为

$$y' = 2x + 2$$

所以微分为

$$dy = (2x + 2)dx$$

$$dy = \left(x^2 + 2x\right)' dx$$

$$= (2x + 2)dx$$

第二节 微分

微分法则与求导法则完全相同

第三节 微分形式的不变性

如果函数$y=f(u)$对u是可导的

- 若u是自变量，此时函数的微分

$$dy=f'(u)du$$

- 若u是一个函数，$u=\varphi(x)$，则y为x的复合函数$y=f[\varphi(x)]$，此时函数的微分为

$$dy=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$$

又因为$du=\varphi'(x)dx$

$$dy=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=f'[\varphi(x)]du=f'(u)du$$

因此，对于函数$y=f(u)$，无论u**是自变量还是一个函数**，函数$y=f(u)$的微分都可以表示为

$$dy=f'(u)du$$

此性质称为**微分形式的不变性**

第三节 微分形式的不变性

课本例2 设$y=\sin(2x+3)$，求dy

解： 令$u=2x+3$，则$y=f(u)=\sin u$

由微分形式不变性，有

$$dy=f'(u)du=(\sin u)'du=\cos u\,du$$

又因为

$$du=(2x+3)'dx=2dx$$

结合这两个式子得到

$$dy=\cos(2x+3)\cdot 2dx$$

第四节 微分在近似计算中的应用

由微分的定义，如果函数$y=f(x)$在x处可微，则有

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)\ (\Delta x \to 0)$$

若$|\Delta x|$很小，可忽略高阶无穷小量$o(\Delta x)$，则有

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

即

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

所以$f(x+\Delta x)$可以近似计算得到，

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

第四节 微分在近似计算中的应用

微分近似计算公式 设函数$y = f(x)$在x处可微，若$|\Delta x|$很小

则$f(x + \Delta x)$可以近似计算，即

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

课本例6 求$\sqrt[3]{1.02}$的近似值

解：原问题即为求函数$y = f(x) = \sqrt[3]{x}$在$x = 1.02$处的近似值

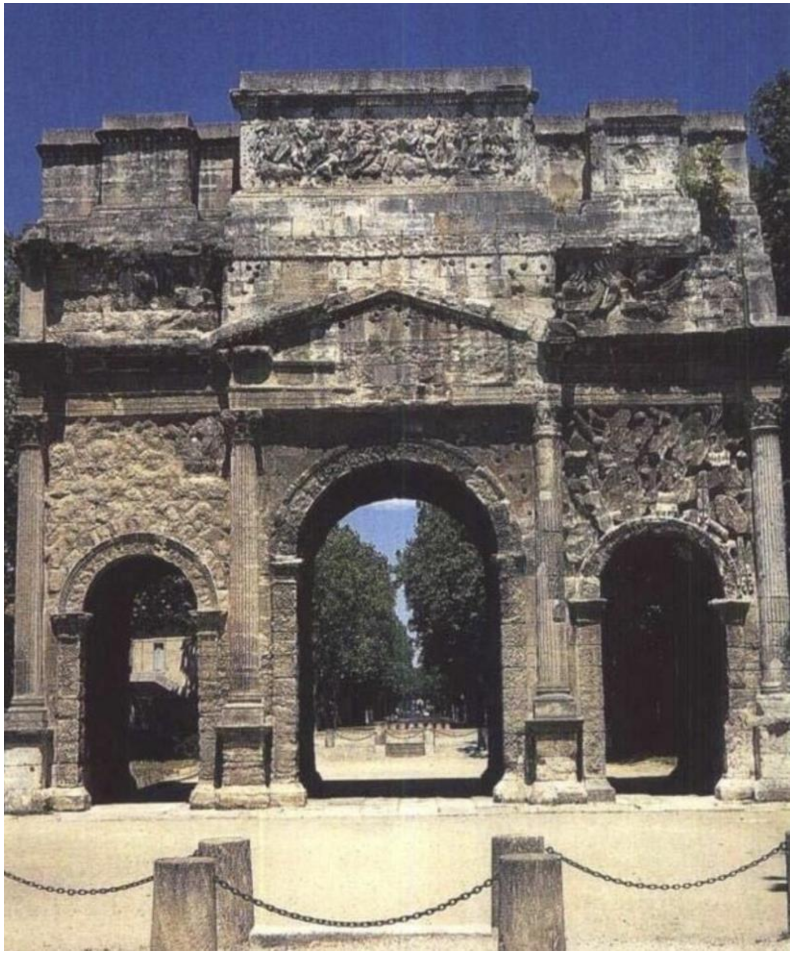
由微分近似计算公式，得到

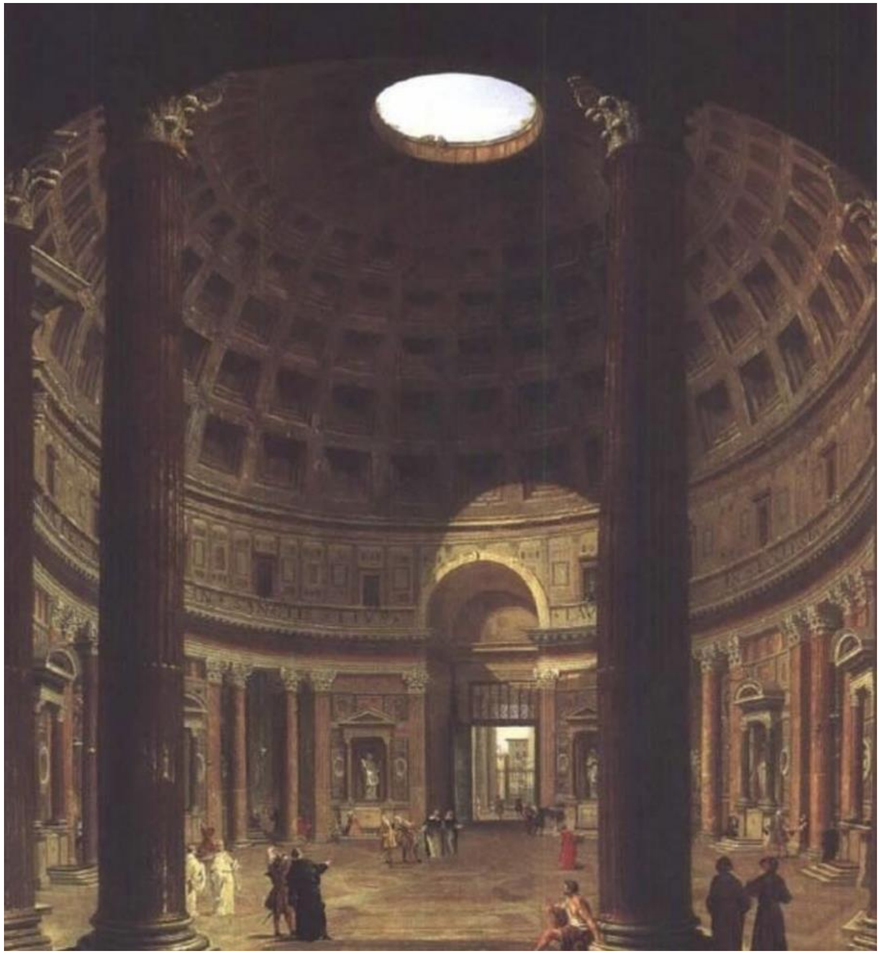
$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x$$

将$x = 1$，$\Delta x = 0.02$代入上式

$$f(1.02) \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3}1^{-\frac{2}{3}} \times 0.02 = \frac{151}{150}$$

即$\sqrt[3]{1.02} \approx \frac{151}{150}$





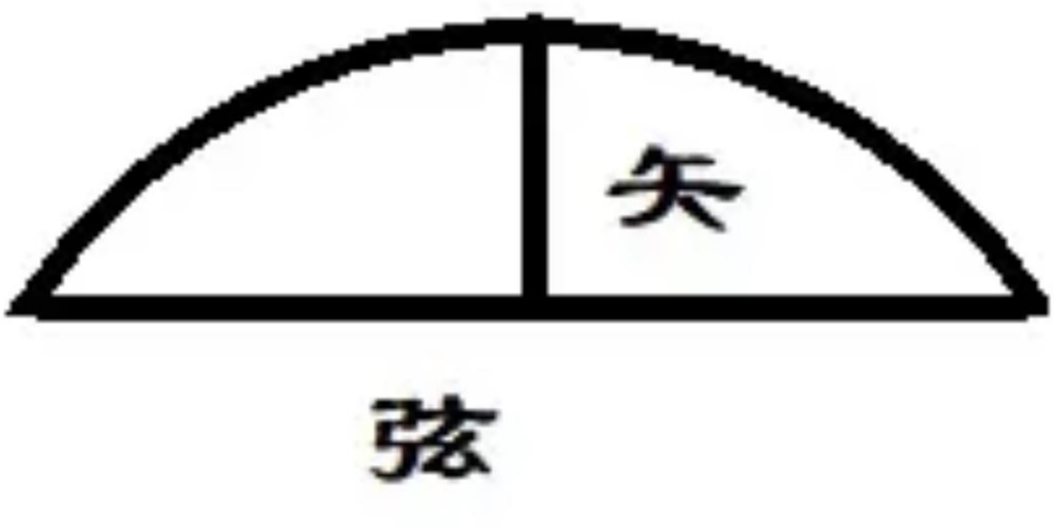
罗马万神殿

《九章算术》共收有246个数学问题，分为九大类，在一个或几个问题之后，列出这个问题的解法。

1. 方田章：主要是田亩**面积**的计算和**分数**的计算，是世界上最早对分数进行系统叙述的著作[5]。
2. 粟米章：主要是粮食**交易**的计算方法，其中涉及许多**比例**问题[5]。
3. 衰分章：主要内容为**分配比例**的算法[5]。
4. 少广章：主要讲开平方和开立方的方法[5]。
5. 商功章：主要是土石方和用工量等**工程数学**问题，以**体积**的计算为主[5]。
6. 均输章：计算**税收**等更加复杂的**比例**问题[5]。
7. 盈不足章：**双设法**的问题[5]。[6]
8. 方程章：主要是**联立一次方程组**的解法和**正负数的加减法**，在世界数学史上是第一次出现[5]。
9. 勾股章：**勾股 定理**，当时社会生活应用，即300年后出现之勾股定理其应用[5]。

弧田算法

术曰：以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一。



刘徽（约225年—约295年）：弧田密率