微积分I

3学分、外招

期末复习

数学系王伟文

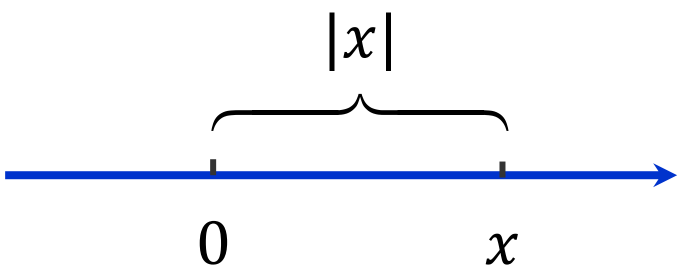
第一章

绝对值

设x为一实数，则其绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

几何意义：$|x|$表示数轴上点x到原点的距离。



$|x-y|$表示数轴上两点x和y之间的距离。

绝对值

绝对值不等式的解：

$$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a;$$

$$|x|>a \Leftrightarrow x<-a \text{ 或 } x>a$$

$$|a|=\sqrt{a^2};$$

函数的定义域

一些常见函数的自然定义域

- $y = \sqrt{x}, x \geq 0$
- $y = \log x\,, x > 0$
- $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$

要熟记！！！

例2 判断函数$y = x$与$y = \frac{x^2}{x}$是否是相同的函数关系

解：不是，因为定义域不同，前者$D(f) = (-\infty, +\infty)$，

后者$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

例3 判断函数$y = x$与$y = \sqrt{x^2}$是否是相同的函数关系

解：不是，因为对应法则不同，前者$y = f(x) = x$

后者$y = |x|$

第七节　反函数与复合函数

(一) 复合函数

复合函数 设函数$y=f(u)$的定义域为$D(f)$，函数$u=\varphi(x)$的值域为$Z(\varphi)$，若$\boldsymbol{Z(\varphi)\cap D(f)\neq\emptyset}$，则称$y=f[\varphi(x)]$为**复合函数**。

$$\boldsymbol{y=\log_{10}(x^2+1)=f[\varphi(x)]},\quad \boldsymbol{y=\log_{10}u},\quad \boldsymbol{u=x^2+1}$$

第七节　反函数与复合函数

(一) 复合函数

例2 已知$y = f(u) = \sqrt{u}$，$u = \varphi(x) = a - x^2$。分别考察当$a = 1$，$a = -1$时，$y = f[\varphi(x)]$是不是复合函数。

解

当$a = 1$时，$y = \sqrt{u}$，$u = 1 - x^2$

$$D(f) = [0, +\infty),\qquad Z(\varphi) = (-\infty, 1],\qquad \boldsymbol{Z(\varphi) \cap D(f) \neq \emptyset}$$

$y = f[\varphi(x)]$是复合函数，此时$y = \sqrt{u} = \sqrt{1 - x^2}$。

$$1 - x^2 \geq 0,\quad x^2 \leq 1，即 -1 \leq x \leq 1$$

因此复合函数$y = f[\varphi(x)]$的定义域为$[-1,1]$

(一) 复合函数

例2 已知$y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=a-x^2$。分别考察当$a=1$，$a=-1$时，$y=f[\varphi(x)]$是不是复合函数。

解

当$a=-1$时，$y=\sqrt{u}$，$u=-1-x^2$

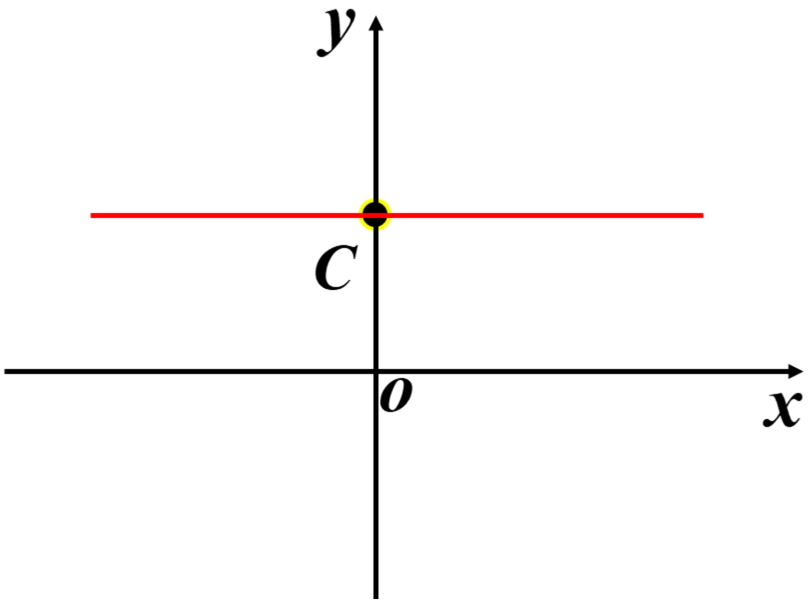
$$D(f)=[0,+\infty),\qquad Z(\varphi)=(-\infty,-1],\qquad \boldsymbol{Z(\varphi)\cap D(f)=\emptyset}$$

$y=f[\varphi(x)]$不是复合函数。

第八节 初等函数

基本初等函数

常数函数 $y = C$（C是常数），其定义域为$(-\infty, +\infty)$



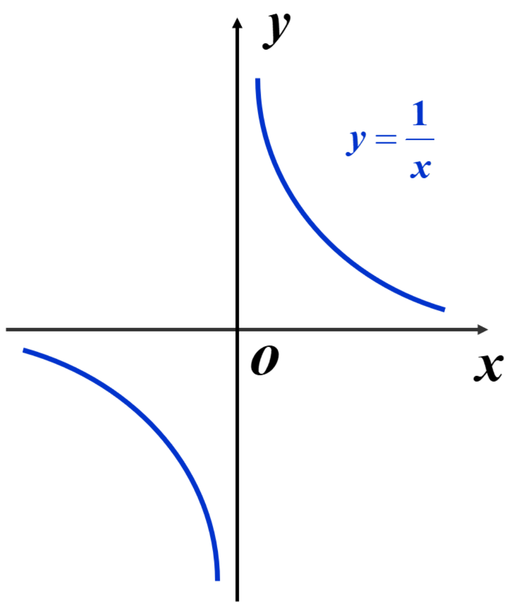
第八节 初等函数

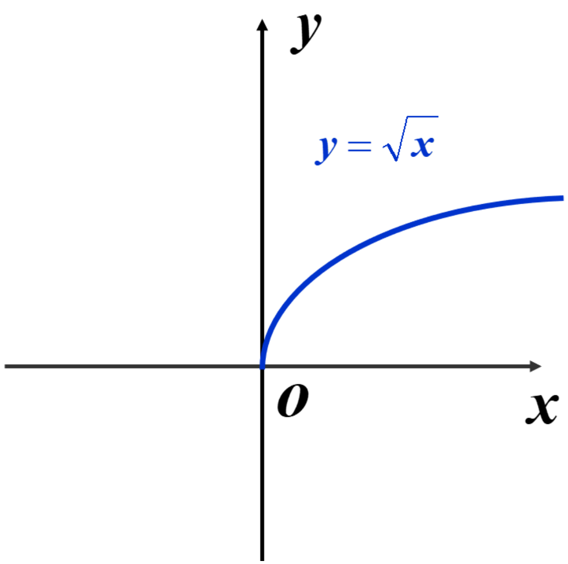
基本初等函数

幂函数 $y = x^a$ (a为实数)，其定义域由a的取值确定。

$a = -1$，$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$，定义域为$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$a = \frac{1}{2}$，$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$，定义域为$[0, +\infty)$



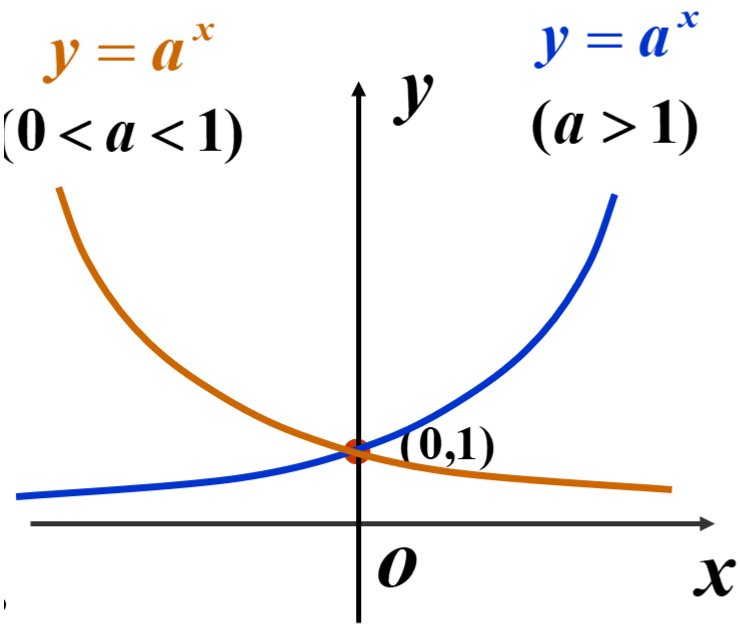


第八节 初等函数

基本初等函数

指数函数 $y = a^x\,(a > 0$且$a \neq 1)$，其定义域为$(-\infty, +\infty)$

- 无论a取何值，都通过点$(0, 1)$，且y总大于0
- 当$a > 1$时，函数单调递增
- 当$0 < a < 1$时，函数单调递减

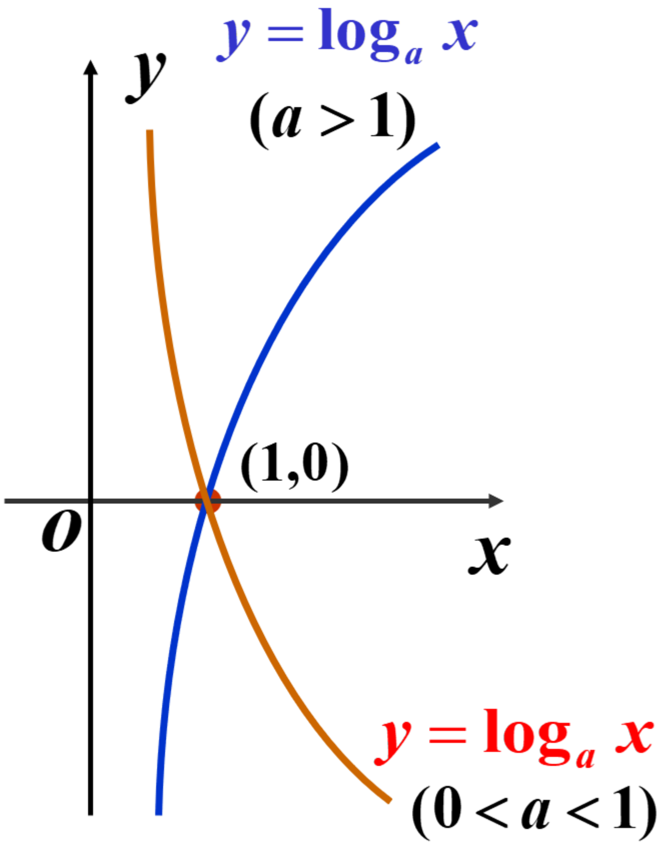


第八节 初等函数

基本初等函数

对数函数 $y = \log_a x\ (a > 0$且$a \neq 1)$，其定义域为$(0, +\infty)$

- 无论a取何值，都通过点$(1, 0)$
- 当$a > 1$时，函数单调递增
- 当$0 < a < 1$时，函数单调递减
- 与指数函数互为反函数$x = a^y$



第八节 初等函数

基本初等函数

[三角函数]

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$$

- $y = \cos x$是偶函数
- $y = \sin x, y = \tan x$是奇函数
- $y = \sin x, y = \cos x$是以2π为周期的函数，$y = \tan x$是以π为周期的函数
- $|\sin x| \le 1$，$|\cos x| \le 1$均为有界函数

第八节 初等函数

基本初等函数

反三角函数

$$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$$

- $y=\arcsin x\,, x\in[-1,1], y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
- $y=\arccos x\,, x\in[-1,1], y\in[0,\pi\,]$
- $y=\arctan x\,, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

分别对应$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$的反函数

第二章

极限存在判定定理

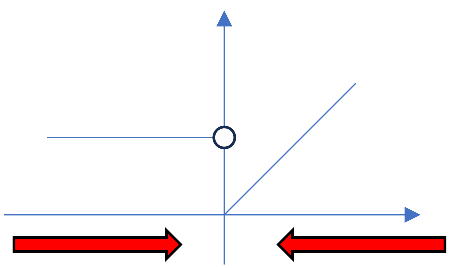
极限存在判定定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$成立的**充分必要条件**是

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$$

充分 **必要**

P $\rightleftarrows$ Q

课本例7 设函数$f(x) = \begin{cases} 1, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}$，判定极限$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$是否存在.



$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在

无穷大量

无穷大量 如果$\lim_{x \to P} f(x) = \infty(\infty, -\infty, +\infty)$，则函数$f(x)$为当$x \to P$时的

无穷大量

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

无穷小量

无穷小量 如果$\lim\limits_{x\to P} f(x) = 0$，则函数$f(x)$为当$x \to P$时的**无穷小量**

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

数列$\{\frac{(-1)^n}{n}\}$是当$n \to \infty$时的无穷小量

无穷小量与无穷大量的关系

- $\lim\limits_{x \to P} f(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to P} \frac{1}{f(x)} = 0$
- $\lim\limits_{x \to P} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to P} \frac{1}{f(x)} = \infty$（$x \to P$时$\frac{1}{f(x)}$合法）

无穷小量的阶

设$\lim\limits_{x\to P} f(x) = \lim\limits_{x\to P} g(x) = 0$

- $x \to P$时，$g(x)$是$f(x)$的**高阶无穷小**，若

$$\lim_{x\to P}\frac{g(x)}{f(x)} = 0,\ \text{记作} g(x) = o(f(x))$$

- $x \to P$时，$g(x)$是$f(x)$的**同阶无穷小**，若

$$\lim_{x\to P}\frac{g(x)}{f(x)} = c(c \neq 0),$$

若$c = 1$，则称为**等价无穷小**，记作$g(x)\sim f(x)$

- $x \to P$时，$g(x)$是$f(x)$的**低阶无穷小**，若

$$\lim_{x\to P}\frac{g(x)}{f(x)} = \infty$$

无穷小量的阶

- $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0} 2x = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = 0$ x^2要比x快 当$x \to 0$ 时x^2是x的高阶无穷小，记作$x^2 = o(x)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x} = 2$ $2x$与x差不多 当$x \to 0$ 时$2x$是x的同阶无穷小，记作$2x \sim x$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2} = \infty$ x比x^2慢得到多 当$x \to 0$ 时x是x^2的低阶无穷小

重要极限之一 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

更一般的形式 若$\varphi(x) \to 0(x \to P)$，则

$$\lim_{x \to P} \frac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)} = 1$$

两个重要极限

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$ 若$\varphi(x)\to\infty(x\to P)$，⍰

$$\lim_{x\to P}(1+\frac{1}{\varphi(x)})^{\varphi(x)}=e \qquad e.g.\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}=e$$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 若$\varphi(x)\to 0(x\to P)$，⍰

$$\lim_{x\to P}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$$

$$e.g.\ \lim_{x\to 2}[1+(x-2)]^{\frac{1}{x-2}}=e$$

小结 求极限的方法

- 若$p(x)$为多项式则

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$$

- $x \to \infty$时多项式比值的极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^q + b_1x^{q-1} + \cdots + b_q} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, n = q \\ 0, n < q \\ \infty, n > q \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{8x^2+7x}$$

- 两边夹 如果$f(x) \le h(x) \le g(x)$, 且$\lim_{x\to P} f(x) = \lim_{x\to P} g(x) = A$, 则

$$\lim_{x\to P} h(x) = A$$

求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

- 无穷小量与有界量的乘积依然是无穷小量 如果$\lim_{x\to P} f(x) = 0$，且$g(x)$在$x \to P$时有界，则

$$\lim_{x\to P} g(x)\cdot f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = ?$$

求极限的方法

- 两个重要极限及其变形

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad 若\varphi(x)\to 0(x\to P)，则\lim_{x\to P}\frac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e \qquad 若\varphi(x)\to\infty(x\to P)，则\lim_{x\to P}(1+\frac{1}{\varphi(x)})^{\varphi(x)}=e$$

- 等价无穷小替换 当$x\to 0$时

$\sin x\sim x$, $\arcsin x\sim x$,
$\tan x\sim x$, $\arctan x\sim x$,
$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$
$\ln(1+x)\sim x$, $e^x-1\sim x$,
$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\ (\alpha\neq 0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$$

连续函数的概念

函数$y = f(x)$在x_0处连续

设函数y=$f(x)$在点x_0的某一邻域$U(x_0, \delta)$ 内有定义，若极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在, 且有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称**函数y=$f(x)$在点x_0处连续。**

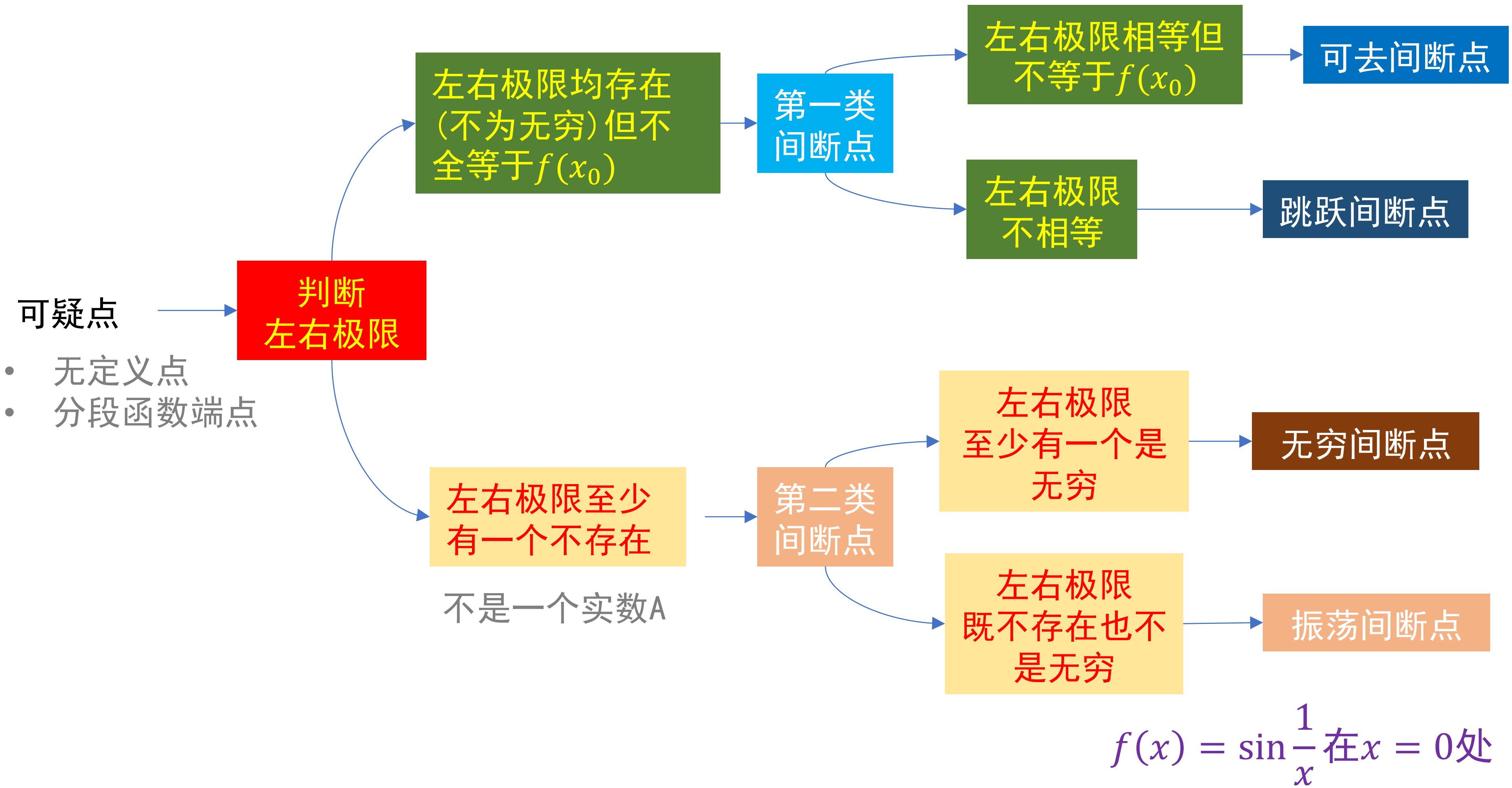
- **多项式$p(x)$总是连续的，所以**

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$$

- **正弦、余弦函数总是连续的，所以**

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 \qquad \lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

函数间断点的类型


可疑点
无定义点
分段函数端点
判断
左右极限
左右极限均存在（不为无穷）但不全等于$f(x_0)$
第一类间断点
左右极限相等但不等于$f(x_0)$
可去间断点
左右极限不相等
跳跃间断点
左右极限至少有一个不存在
不是一个实数A
第二类间断点
左右极限至少有一个是无穷
无穷间断点
左右极限既不存在也不是无穷
振荡间断点
$f(x) = \sin\frac{1}{x}$在$x = 0$处

利用函数连续性求函数极限

若函数$y=f(x)$在点x_0处连续，则有

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x^2}\cos x}{x^2+1}$

解： $f(x) = \dfrac{e^{x^2}\cos x}{x^2+1}$在$x = 0$处连续

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x^2}\cos x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}\cos x}{x^2+1} = f(0) = \dfrac{e^{0^2}\cos 0}{0^2+1} = 1$

利用函数连续性求函数极限

若函数y=$f(x)$在点x_0处连续，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

课本例12 求$\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

解： $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$

连续函数中极限符号与函数符号可以交换

例 设$h(x)=\begin{cases} x+1, x\geq 1 \\ x-1, x<1 \end{cases}$, 求$\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$

第三章

导数的概念

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

导数的几何意义

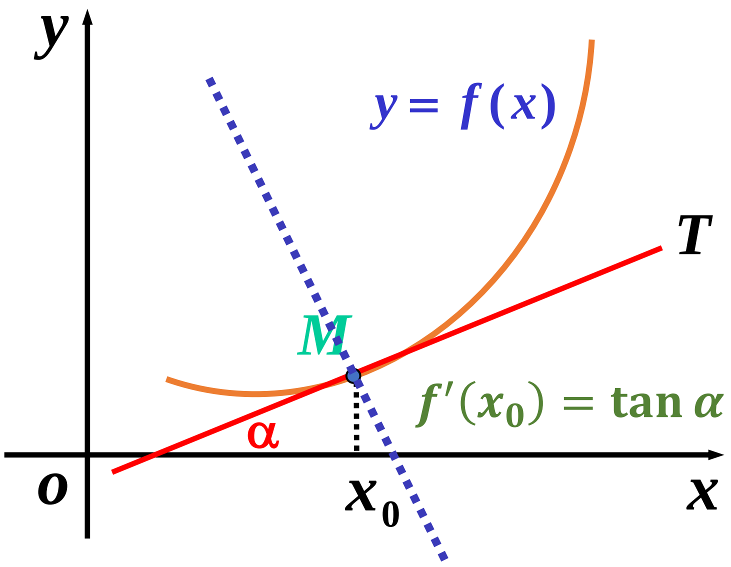
在几何上，函数$y=f(x)$在点x_0处的**导数$f'(x_0)$**表示**曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率**，即$f'(x_0)=\tan\alpha$, 其中α为切线的倾角

经过点$M(x_0,f(x_0))$的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x_0-x)$$

经过点$M(x_0,f(x_0))$的法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x_0-x)$$



左、右导数

设函数$f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，

- 如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，则称之为$f(x)$在点$x_0$处的**左导数**，记作$f'_-(x_0)$；
- 如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，则称之为$f(x)$在点$x_0$处的**右导数**，记作$f'_+(x_0)$；

函数$f(x)$在点x_0处的导数存在，当且仅当$f(x)$在点x_0处的左、右导数存在且相等，即

$$f'(x_0)=A \iff f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$$

可导与连续的关系

定理 如果函数$y=f(x)$在点x_0处可导，则它在点x_0处一定连续

- 在点x_0处可导，则必在点x_0处连续
- 在点x_0处不连续，则在点x_0处必不可导
- 在点x_0处连续，无法判断在点x_0处是否可导

熟记!!!

可导与连续的关系

课本例8 讨论函数$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$在$x = 0$处的连续性及可导性

解： $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

因此函数$f(x)$在$x = 0$处连续

第一节 导数的概念

(四) 可导与连续的关系

课本例8 讨论函数$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$在$x = 0$处的连续性及可导性

解： 先考察左导数

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

再考察右导数

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$f'_{+}(0) \neq f'_{-}(0)$ 因此函数$f(x)$在$x = 0$处不可导

综上所述，函数$f(x)$在$x = 0$处连续，但不可导

可导与连续的关系

例 求函数$y=f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0 \\ 2x, & 0<x\le 1 \\ x^2+1, & 1<x\le 2 \\ \frac{1}{2}x+4, & x\ge 2 \end{cases}$ $x=1$处的导数$f'(1)$

解： 在点$x=1$处先考察左导数

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

再考察右导数

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

$f'_+(1)=f'_-(1)=2$ $f(x)$在点$x=1$处可导且$f'(1)=2$

第二节 导数的基本公式

(一) 基本初等函数的导数

熟记!!!

常数函数 $y = C$ $\qquad y' = (C)' = 0$

幂函数 $y = x^{a}$ $\qquad y' = (x^{a})' = a \cdot x^{a-1}$

对数函数 $y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$ $\qquad y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$

特别地，若 $y = \ln x$ 则 $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

指数函数 $y = a^{x}\ (a > 0, a \neq 1)$ $\qquad y' = (a^{x})' = a^{x} \cdot \ln a$

特别地，若 $y = e^{x}$ 则 $y' = (e^{x})' = e^{x}$

第二节 导数的基本公式

(一)基本初等函数的导数

熟记!!!

三角函数

$y=\sin x$ $\quad$ $y'=(\sin x)'=\cos x$

$y=\cos x$ $\quad$ $y'=(\cos x)'=-\sin x$

$y=\tan x$ $\quad$ $y'=(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

反三角函数

$y=\arcsin x(-1<x<1)$ $\quad$ $y'=(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$

$y=\arccos x(-1<x<1)$ $\quad$ $y'=(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$

$y=\arctan x$ $\quad$ $y'=(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$y=\text{arccot}\, x$ $\quad$ $y'=(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

$$[f(x) \pm g(x)]' = [f(x)]' \pm [g(x)]'$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = [f(x)]' \cdot g(x) + f(x) \cdot [g(x)]'$$

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{[f(x)]' \cdot g(x) - f(x) \cdot [g(x)]'}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = (f[\varphi(x)])' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$ f对整体求导×整体对x求导

隐函数的导数

课本例15 方程 $y = x\ln y$确定y是x的函数，求y的导数。

解：已知y可以表示为x的函数，即$y = f(x)$

因此，方程可以$y = x\ln y$改写为

$$f(x) = x \cdot \ln f(x)$$

上述方程两端同时对x求导数

等式两端同时对相同的变量求导不会改变等号

$$[f(x)]' = [x \cdot \ln f(x)]'$$

等式左边$= [f(x)]' = f'(x)$

等式右边$[x \cdot \ln f(x)]' = (x)' \cdot \ln f(x) + x \cdot [\ln f(x)]' = \ln f(x) + x \cdot \frac{1}{f(x)} f'(x)$

即 $f'(x) = \ln f(x) + x \cdot \frac{1}{f(x)} f'(x)$ 解得$f'(x) = \frac{f(x)\cdot\ln f(x)}{f(x)-x} = \frac{y\cdot\ln y}{y-x}$

取$y = f(x)$代入原方程

对原方程两端同时关于x求导

求导后，将y的导数即$f'(x)$视未知数求解

在上述求解结果中再将$f(x)$替换为y

对数求导法

课本例20 求$y = x^x$的导数。

解： 对函数左右两端取自然对数，即

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

记$y = f(x)$，代入上式

$$\ln f(x) = x \ln x$$

两边对x求导

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)'$$

$$= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

解得

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln x + 1)$$

$$= x^x \cdot (\ln x + 1)$$

由参数方程所确定的函数导数

课本例22 已知$\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$，求$\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

解：

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = 2t$$

高阶导数

例 求函数$y = xe^x$的二阶导数

解：
$$y' = (xe^x)'$$
$$= (x)'e^x + x(e^x)'$$
$$= e^x + xe^x$$

$$y^{(2)} = (e^x + xe^x)'$$
$$= (e^x)' + (xe^x)'$$
$$= e^x + e^x + xe^x$$
$$= 2e^x + xe^x$$

微分

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

令$y = x$，则

$$dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$$

所以$y = f(x)$在点x处的微分可以表示为

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$$

第四章

中值定理

罗尔中值定理 若函数$f(x)$满足以下3个条件：

a. 在闭区间$[a,b]$上连续；

b. 在开区间(a,b)上可导；

c. 在区间的两个端点函数值相等，即$f(a)=f(b)$；

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，满足$f'(\xi)=0$

中值定理

拉格朗日中值定理 若函数$f(x)$满足以下2个条件：

a. 在闭区间$[a,b]$上连续；

b. 在开区间(a,b)上可导；

则至少存在一点$\xi \in (a,b)$，满足

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

或等价地

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

- 在上述两个条件的基础上，若在区间的两个端点函数值相等，即$f(a) = f(b)$，则有$f'(\xi) = 0$，拉格朗日中值定理即为罗尔中值定理。

洛必达法则

设函数$f(x)$与$g(x)$满足条件：

（1） $\lim\limits_{x\to P} f(x)=\lim\limits_{x\to P} g(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to P} f(x)=\lim\limits_{x\to P} g(x)=\infty$

（2） 在$x\to P$的某个邻域内可导，且$g'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to P}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (或∞)

则必有

$$\lim_{x\to P}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to P}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$$

- 洛必达法则表明，若满足洛必达法则的使用条件，求极限$\lim\limits_{x\to P}\frac{f(x)}{g(x)}$可以等价与求极限$\lim\limits_{x\to P}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

洛必达法则

洛必达法则不是无所不能

- 若不是$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$的未定式，不能使用洛必达法则化简极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}$

- 当$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$不是常数A且不为∞时，不能断言$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$不存在，只能说明使用洛必达法则失效，需要使用其他的解决方法 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}$

使用洛必达法则求其他类型的未定式

转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式求解

$$0\cdot\infty \longrightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$0\cdot\infty \longrightarrow 0/\frac{1}{\infty} \longrightarrow \frac{0}{0}$$

$$\infty-\infty \longrightarrow \frac{1}{0}-\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{0-0}{0}$$

使用洛必达法则求其他类型的未定式

转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式求解

$$\left.\begin{matrix} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \left\{\begin{matrix} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \\ 0\cdot\ln\infty \end{matrix}\right. \Rightarrow 0\cdot\infty.$$

函数的增减性

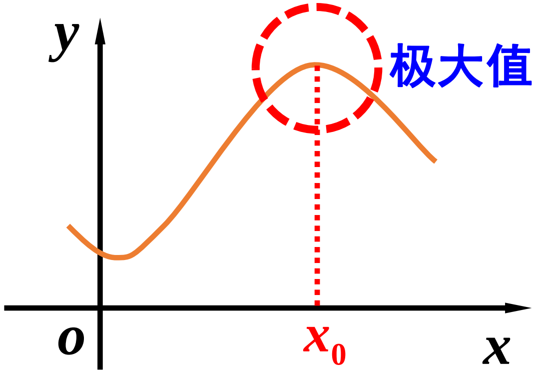
设函数$f(x)$在区间(a,b)内可导，则

(1) 如果$x\in(a,b)$是总有$f'(x)>0$，则$f(x)$在(a,b)内单调增加；

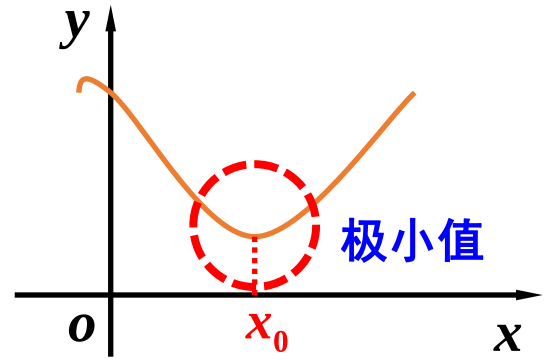
(2) 如果$x\in(a,b)$是总有$f'(x)<0$，则$f(x)$在(a,b)内单调减少；

- 单调递增区间$\{x|f'(x)>0\}$，单调递减区间即$\{x|f'(x)<0\}$

函数的极值



极大值点



极小值点

- 极大值点在它的左邻域单调递增，在它的右邻单调递减

盛极必衰

- 极小值点在它的左邻域单调递减，在它的右邻单调递增

触底反弹

函数的极值

函数极值的必要条件 如果函数$f(x)$在点x_0处有极值$f(x_0)$且$f'(x_0)$**存在**，则

$$f'(x_0) = 0$$

可导(可微)函数在极值点处的导数必定为零

使$f'(x) = 0$的点称为函数的驻点，驻点可能是函数极值点，也可能不是函数的极值点

例如$f(x) = x^3$，$f'(0) = 0$，但$x = 0$不是极值点

函数的极值

例 确定函数$f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$的单调增减区间和极值。

解： 先求导数

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

令$f'(x) = 0$，解得驻点

$$x_1 = 0，x_2 = 2$$

这2个点将$(-\infty, +\infty)$分成3个区间

$$(-\infty, 0)，(0, 2)，(2, +\infty)$$

我们可以通过考察导数$f'(x)$在这3个区间上的符号判断对应区间上函数的单调性

函数的极值

例 确定函数$f(x)=x^3-3x^2+7$的单调增减区间和极值。

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

制作表格

$\boldsymbol{x}$	$(-\infty,0)$	$\mathbf{0}$	$(0,\mathbf{2})$	$\mathbf{2}$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	>0	0	<0	0	>0
$f(x)$	$\uparrow$	极大值 $f(0)=7$	$\downarrow$	极小值 $f(2)=3$	$\uparrow$

由表格可知，函数$f(x)$在区间$(-\infty,0\ )\cup(2,+\infty)$上单调递增，在区间$(0,2)$上单调递减。

函数$f(x)$在$x=0$处取得极大值$f(\mathbf{0})=7$，在$x=2$处取得极小值$f(2)=3$。

函数的极值

课本例2表明，驻点与函数不可导点均可能是函数取得极大(小)值的点(极值点)，**因此在求极值及极值点时，均需要考察驻点与不可导点左右两侧函数的单调性**

函数的极值

函数极值的判断定理 设$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)$存在，

- **如果$f''(x_0)<0$，则函数$f(x)$在x_0处取得极大值$f(x_0)$**
- **如果$f''(x_0)>0$，则函数$f(x)$在x_0处取得极小值$f(x_0)$**

驻点处二阶导数大于0，必为极小值点；驻点处二阶导数小于0，必为极大值点

函数最大值与最小值

求函数$f(x)$在区间$[a,b]$上最大值或最小值的基本步骤

1. 先求出函数$f(x)$的全部驻点及不可导点

2. 求出函数在这些驻点与不可导点的函数值

3. 再求出函数在区间端点的函数值$f(a)$和$f(b)$

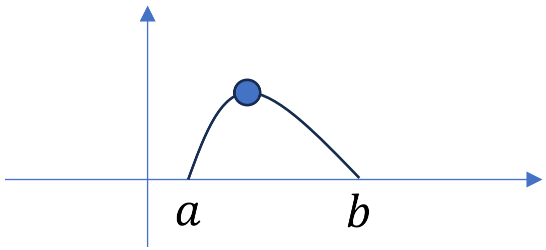
4. 比较这些函数值的大小

最大者即区间$[a,b]$上最大值

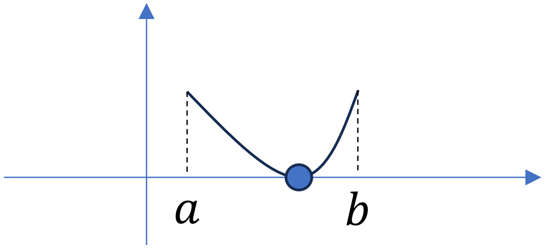
最小者即区间$[a,b]$上最小值

函数最大值与最小值(求最大利润、最小成本等)

最大值与极大值等价的情形 如果函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$[a,b]$内可导，若函数$f(x)$在(a,b)内**有且仅有一个极大值，而无极小值**，**则此极大值即为最大值。**



最小值与极小值等价的情形 如果函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$[a,b]$内可导，若函数$f(x)$在(a,b)内**有且仅有一个极小值，而无极大值**，**则此极小值即为最小值。**



函数最大值与最小值

课本例5　某食品厂生产辣条，每包销售5元，当每周销量（单位：千包）为Q时，周总成本为$C(Q)=2400+4000Q+100Q^2$（元），设价格不变，求(1)可获得利润的销量范围；（2）每周销量为多少包时，可获得最大利润

解：　$L(Q)=-100Q^2+1000Q-2400$

求导数　　　$L'(Q)=-200Q+1000$

令导数$L'(Q)=0$，解得驻点$Q=5$，且没有不可导点。

求二阶导数$L''(Q)=-200$，　$L''(5)=-200<0$，故$Q=5$为唯一极大值点，且无极小值点。

此时极大值$L(5)=100$即为$L(Q)$的最大值。

因此每周销量为5000包时，可获得最大利润

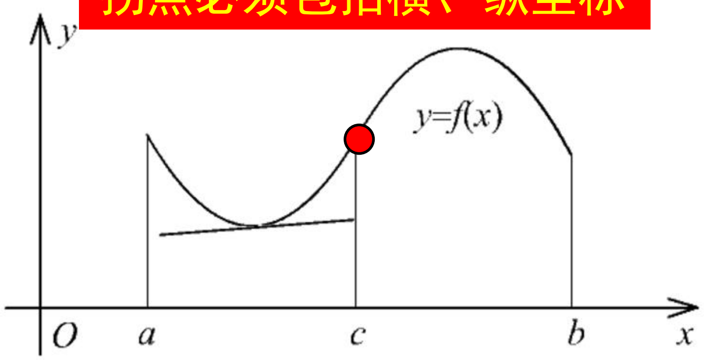
曲线的凹向与拐点

曲线凹向判定定理 设函数$f(x)$在区间(a,b)内具有二阶导数，则

- 如果当$x\in(a,b)$时，恒有$f''(x)>0$，则曲线$y=f(x)$在(a,b)内上凹；
- 如果当$x\in(a,b)$时，恒有$f''(x)<0$，则曲线$y=f(x)$在(a,b)内下凹。

曲线上凹和下凹的分界点称为曲线的**拐点**

拐点必须包括横、纵坐标



- 在拐点适当小的左右邻域 $f''(x)$ 必然异号，因而在拐点处要么$f''(x)=0$，要么$f''(x)$不存在

求拐点的步骤

求二阶导数$f''(x)=0$及$f''(x)$不存在**的点** → 如果在该点的左右两侧二阶导数$f''(x)$**异号** → 该点则为函数的**拐点的横坐标**

函数图像的作法

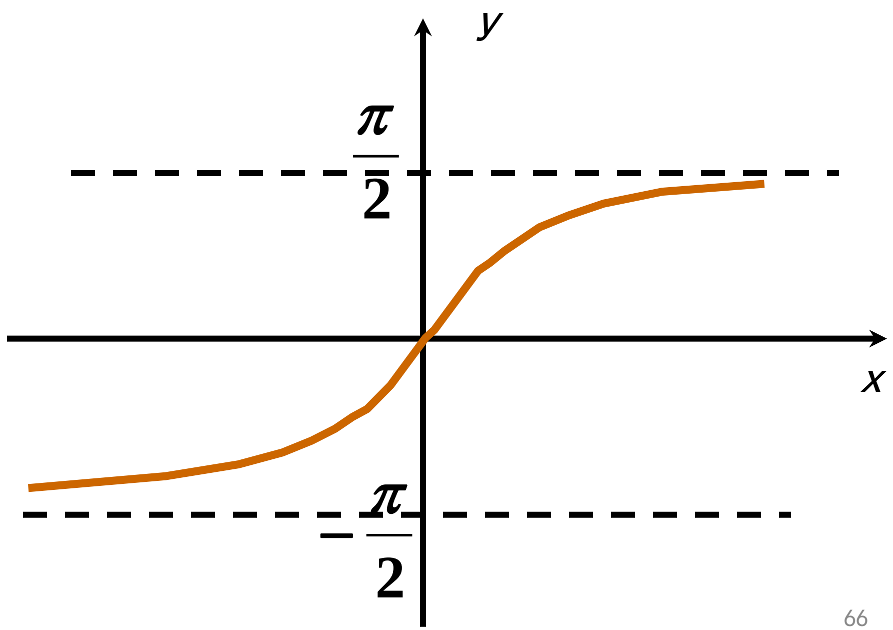
水平渐近线（平行于x轴）如果$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$或$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$，这里$A$是常数，则称$y=A$是函数$f(x)$的一条水平渐近线

例如$f(x)=\arctan x$

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

故$f(x)=\arctan x$有两条水平渐近线$y=\frac{\pi}{2}$及$y=-\frac{\pi}{2}$



函数图像的作法

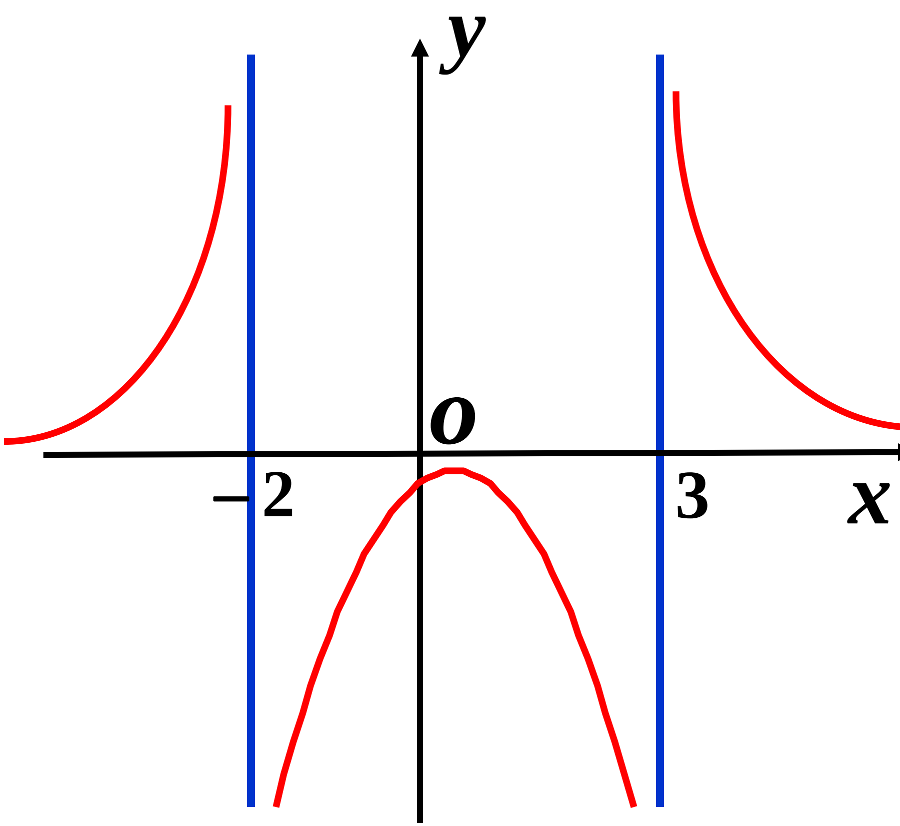
铅垂（垂直）渐近线（垂直于x轴） 如果$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$，则称$x=a$是函数$f(x)$的一条<u>铅垂渐近线（或称垂直渐近线）</u>

例如$f(x)=\frac{1}{(x+2)(x-3)}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{1}{(x+2)(x-3)}=\infty$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+2)(x-3)}=\infty$$

故$f(x)=\frac{1}{(x+2)(x-3)}$有两条铅垂渐近线$x=-2$、 $x=3$



变化率及相对变化率在经济学中的运用

设C为总成本，C_1为固定成本，C_2为可变成本，$\bar{C}$为平均成本，C'为边际成本，Q为产量，则有

- **总成本函数：$C = C(Q) = C_1 + C_2(Q)$**
- **平均成本函数：$\overline{C} = \overline{C}(Q) = \dfrac{C(Q)}{Q} = \dfrac{C_1}{Q} + \dfrac{C_2(Q)}{Q}$**
- **边际成本函数：$C' = C'(Q)$**

- **$C'(Q_0)$称为当产量为Q_0时的边际成本。**

- **经济学上可以解释为：当产量达到Q_0时，增加一个单位的产量所增加的成本为$C'(Q_0)$。**

变化率及相对变化率在经济学中的运用

设C为总成本，C_1为固定成本，C_2为可变成本，$\bar{C}$为平均成本，C'为边际成本，Q为产量，则有

- **总成本函数：**$\boldsymbol{C = C(Q) = C_1 + C_2(Q)}$
- **平均成本函数：**$\boldsymbol{\overline{C} = \overline{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{C_1}{Q} + \frac{C_2(Q)}{Q}}$
- **边际成本函数：**$\boldsymbol{C' = C'(Q)}$

- $\boldsymbol{C'(Q_0)}$**称为当产量为**$\boldsymbol{Q_0}$**时的边际成本。**

- **经济学上可以解释为：当产量达到**$\boldsymbol{Q_0}$**时，增加一个单位的产量所增加的成本为**$\boldsymbol{C'(Q_0)}$ **。**

变化率及相对变化率在经济学中的运用

函数$f(x)$在$x = x_0$处弹性

$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y_0}{\Delta x / x_0}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

$$= f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

对于一般x, 若$f(x)$可导，则

$$\boxed{\frac{Ey}{Ex} = f'(x)\frac{x}{y} = f'(x)\frac{x}{f(x)}}$$

称为函数$f(x)$的弹性函数

变化率及相对变化率在经济学中的运用

函数$f(x)$在$x = x_0$处弹性

$\frac{E}{Ex}f(x_0)$ （或$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$ ）表示在点$x = x_0$处，当自变量产生1%的改变时，函数值$f(x)$近似改变$\frac{E}{Ex}f(x_0)\%$