

最优化方法 第十一讲

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年 5 月 27 日

目录

- 1 共轭函数
 - 定义和基本性质
 - 二次共轭函数
 - 共轭函数计算法则
 - 例子
 - Fenchel 对偶定理
 - 共轭函数的次微分

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

定义 1 (适定函数 (Proper Function))

设 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 为扩展实值函数, 若

$$f(\mathbf{x}) > -\infty, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E} \quad \text{且} \quad \exists \mathbf{x}' \in \mathbb{E}, f(\mathbf{x}') < \infty,$$

则称 f 为适定函数.

- 在扩展实值函数中, 需要适定函数概念.
- 函数定义域

$$\text{dom } f \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}, f(\mathbf{x}) < +\infty\}$$

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

引理 2

设 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为适定凸函数, 则 $\exists \mathbf{x} \in \text{dom } f$, 使得 ∂f 非空.

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

定义 3 (共轭函数)

设 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 为扩展实值函数. 定义函数 $f^*: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$f^*(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{E}} \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - f(\mathbf{x})\} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{E}.$$

称之为函数 f 的共轭函数.

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

定理 4

设 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 为扩展实值函数, 则 f^{**} 为闭凸函数.

- 此结论由上镜图得到.

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

定理 5

设 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为适定凸函数, 则 f^* 为适定函数.

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

证明.

因为 f 为适定函数, 故存在 $\mathbf{x} \in \text{dom } f$. 由共轭函数定义

$$f^*(\mathbf{y}) \geq \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{y} \in \mathbb{E}.$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - f(\mathbf{x}) > -\infty.$$

余下需证明 $\text{dom } f^*$ 非空.

由引理 2, 存在 $\tilde{\mathbf{x}} \in \text{dom } f$, 使得 $\partial f(\tilde{\mathbf{x}})$ 非空, 故 $\exists \mathbf{g} \in \partial f(\tilde{\mathbf{x}})$

$$f(\mathbf{z}) \geq f(\tilde{\mathbf{x}}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{x}} \rangle \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{E}$$

移项得到

$$\langle \mathbf{g}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle - f(\tilde{\mathbf{x}}) \geq \langle \mathbf{g}, \mathbf{z} \rangle - f(\mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{E}$$



共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

证明.

$$\langle \mathbf{g}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle - f(\tilde{\mathbf{x}}) \geq \langle \mathbf{g}, \mathbf{z} \rangle - f(\mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{E}$$

不等式两端同时关于 $\mathbf{z}$ 取最大值

$$f^*(\mathbf{g}) = \max_{\mathbf{z} \in \mathbb{E}} \{\langle \mathbf{g}, \mathbf{z} \rangle - f(\mathbf{z})\} \leq \langle \mathbf{g}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle - f(\tilde{\mathbf{x}}) < \infty$$

故 $\mathbf{g} \in \text{dom } f^*$, 即 $\text{dom } f^*$ 非空.

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

定理 6 (Fenchel 不等式)

设 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为适定函数, 则

$$f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}^*) \geq \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^*$$

- 直接由共轭函数定义得到.

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

证明.

由共轭函数定义

$$f(\mathbf{y}^*) \geq \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^*$$

因为 f 为适定函数, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}, f(\mathbf{x}) > -\infty$, 故 $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{E}^*, f^*(\mathbf{y}) > -\infty$.
不等式两端同时加上 $f(\mathbf{x})$, 有

$$f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}^*) \geq \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^*$$



共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

定义 7 (二次共轭函数)

设 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 为扩展实值函数. 假设 $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{**}$, 定义函数

$$f^{**}(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in \mathbb{E}^*} \{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f^*(\mathbf{x})\} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}.$$

称之为 f 的二次共轭函数 (biconjugate).

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

引理 8

设 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 为扩展实值函数, 则 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}, f(\mathbf{x}) \geq f^{**}(\mathbf{x})$

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

证明.

因为

$$f^*(\mathbf{y}) \geq \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{E}^*, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}.$$

若 $f(\mathbf{x}) = +\infty$, 显然

$$f(\mathbf{x}) \geq \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f^*(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{E}^*$$

若 $f(\mathbf{x}) = -\infty$, 则 $f^*(\mathbf{y}) = +\infty$, 故

$$f(\mathbf{x}) \geq \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f^*(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{E}^*$$

若 $f(\mathbf{x}) \notin \{\pm\infty\}$, 则 $f^{**}(\mathbf{y}) > -\infty$, 不等式左右两端同时加上 $f(\mathbf{x})$

$$f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y}) \geq \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{E}^*$$



共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

证明.

$$f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y}) \geq \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{E}^*$$

不等式两端同时减去 $f^*(\mathbf{y})$

$$f(\mathbf{x}) \geq \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f^*(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{E}^*$$

综上所述

$$f(\mathbf{x}) \geq \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f^*(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^{**}$$

故

$$f(\mathbf{x}) \geq \max_{\mathbf{y} \in \mathbb{E}^*} \{ \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f^*(\mathbf{y}) \} = f^{**}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}.$$



共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

定理 9

设 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为适定闭凸函数, 则 $f = f^{**}$.

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

定理 10

设函数 $g: \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \cdots \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, 定义为

$$g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p) = \sum_{i=1}^p f_i(\mathbf{x}_i),$$

其中 $\forall i \in [p], f_i: \mathbb{E}_i \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为适定函数, 则

$$g^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_p) = \sum_{i=1}^p f_i^*(\mathbf{y}_i^*) \quad \forall \mathbf{y}_i^* \in \mathbb{E}_i^*, i \in [p].$$

- 适定函数避免出加法现未定式

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

证明.

$$\forall (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_p) \in \mathbb{E}_1^* \times \mathbb{E}_2^* \times \dots \times \mathbb{E}_p^*$$

$$\begin{aligned} g^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_p) &= \max_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p} \{ \langle (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_p), (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p) \rangle - g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p) \} \\ &= \max_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p} \left\{ \sum_{i=1}^p (\langle \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i \rangle - f_i(\mathbf{x}_i)) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^p \max_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p} \{ \langle \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i \rangle - f_i(\mathbf{x}_i) \} \\ &= \sum_{i=1}^p f_i^*(\mathbf{y}_i) \end{aligned}$$



共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

定理 11

设 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$,

(a) 函数 $g(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$ 的共轭函数为

$$g^*(\mathbf{y}) = \alpha f^*\left(\frac{\mathbf{y}}{\alpha}\right) \quad \mathbf{y} \in \mathbb{E}^*.$$

(b) 函数 $h(\mathbf{x}) = \alpha f\left(\frac{\mathbf{x}}{\alpha}\right)$ 的共轭函数函数为

$$h^*(\mathbf{y}) = \alpha f^*(\mathbf{y}) \quad \mathbf{y} \in \mathbb{E}^*$$

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

证明.

a.

$$\begin{aligned} g^*(\mathbf{y}) &= \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{E}} \{ \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \alpha f(\mathbf{x}) \} \\ &= \alpha \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{E}} \{ \langle \frac{\mathbf{y}}{\alpha}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x}) \} \\ &= \alpha f^*\left(\frac{\mathbf{y}}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} h^*(\mathbf{y}) &= \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{E}} \left\{ \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \alpha f\left(\frac{\mathbf{x}}{\alpha}\right) \right\} \\ &= \alpha \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{E}} \left\{ \langle \mathbf{y}, \frac{\mathbf{x}}{\alpha} \rangle - f\left(\frac{\mathbf{x}}{\alpha}\right) \right\} \\ &= \alpha f^*(\mathbf{y}) \end{aligned}$$



共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

指数函数

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

$$f^*(y) = \max_x \{xy - e^x\}$$

若 $y < 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xy - e^x) = +\infty.$$

若 $y > 0$. $f(x)$ 为凹函数, 在 $x = \log y$ 处有最大值

$$f^*(y) = y \log y - y$$

若 $y = 0$,

$$f^*(0) = 0$$

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

约定 $0 \cdot \log 0 = 0$, 综上所述

$$f^*(y) = \begin{cases} y \log y - y, & y \geq 0; \\ +\infty, & y < 0. \end{cases}$$

负熵

设函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 定义为

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \log x_i, & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \\ +\infty, & \text{否则.} \end{cases}$$

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

定义函数

$$g(t) = \begin{cases} t \log t, & t \geq 0; \\ +\infty, & t < 0. \end{cases}$$

$$g^*(s) = \max_{x \geq 0} \{xs - x \log x\}$$

当 $x > 0$ 时, $\tilde{g}(x) = xs - x \log x$ 为凹函数, 由最优性条件, $x = e^{s-1}$ 时, $\tilde{g}$ 取得最大值 e^{s-1} .

故

$$\begin{aligned} g^*(s) &= \max_{x \geq 0} \{xs - x \log x\} \\ &= \max \left(\tilde{g}(0), \max_{x > 0} \tilde{g}(x) \right) \\ &= e^{s-1} \end{aligned}$$

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

由定理 10,

$$f^*(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n e^{y_i - 1} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Ball-Pen

设函数 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 定义为

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2}, & \|\mathbf{x}\| \leq 1; \\ +\infty, & \text{否则.} \end{cases}$$

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

$$\begin{aligned}
 f^*(\mathbf{y}) &= \max_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \{ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2} \} \\
 &= \max_{\alpha \in [0,1]} \max_{\|\mathbf{x}\| = \alpha} \left\{ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2} \right\} \\
 &= \max_{\alpha \in [0,1]} \max_{\|\mathbf{x}\| = \alpha} \left\{ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \sqrt{1 - \alpha^2} \right\} \\
 &= \max_{g(\alpha) \triangleq \alpha \in [0,1]} \{ g(\alpha) \equiv \alpha \|\mathbf{y}\|_* + \sqrt{1 - \alpha^2} \}
 \end{aligned}$$

当 $\alpha = \sqrt{\frac{\|\mathbf{y}\|_*^2}{\|\mathbf{y}\|_*^2 + 1}}$ 时, $g(\alpha)$ 取得最大值, 代入上式得到

$$f^*(\mathbf{y}) = \sqrt{\|\mathbf{y}\|_*^2 + 1}$$

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

平方范数

设 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2$,

$$\begin{aligned} f^*(\mathbf{y}) &= \max_{\mathbf{x}} \left\{ \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \right\} \\ &= \max_{\alpha \in [0, +\infty)} \left\{ \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \frac{1}{2} \alpha^2 \right\} \\ &= \max_{\alpha \in [0, +\infty)} \left\{ g(\alpha) \equiv \alpha \|\mathbf{y}\|_* - \frac{1}{2} \alpha^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|_*^2. \end{aligned}$$

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

考虑优化问题

$$(P) \quad \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{E}} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$$

改写为

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{E}, \mathbf{z} \in \mathbb{E}} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \quad \text{s.t. } \mathbf{x} = \mathbf{z}.$$

拉格朗日乘数

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} - \mathbf{x} \rangle$$

对偶函数

$$q(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{E}, \mathbf{z} \in \mathbb{E}} L(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) = -f^*(\mathbf{y}) - g^*(-\mathbf{y})$$

对偶问题

$$\max_{\mathbf{y} \in \mathbb{E}^*} q(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{y} \in \mathbb{E}^*} \{q(\mathbf{y}) \equiv -f^*(\mathbf{y}) - g^*(-\mathbf{y})\}$$

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

Fenchel 对偶定理给出强对偶性成立条件

定理 12 (Fenchel 对偶定理)

设 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为适定凸函数, 若 $\text{ri}(\text{dom } f) \cap \text{ri}(\text{dom } g) \neq \emptyset$, 则

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{E}} \{f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\} = \max_{\mathbf{y} \in \mathbb{E}^*} \{-f^*(\mathbf{y}) - g^*(-\mathbf{y})\}$$

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

定理 13

设 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为适定凸函数, 则对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{E}^*$, 有

$$(a) \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y});$$

$$(b) \quad \mathbf{y} \in \partial f(\mathbf{x});$$

(a) 与 (b) 等价. 此外, 若 f 为闭函数, 有

$$(c) \quad \mathbf{x} \in \partial f^*(\mathbf{y})$$

与 (a), (b) 等价.

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

证明.

 $((a) \Rightarrow (b))$ 因为

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$$

故

$$f^*(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - f(\mathbf{x}) \geq \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle - f(\mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{E}$$

整理得到

$$f(\mathbf{z}) \geq f(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} - \mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{E}$$

故 $\mathbf{y} \in \partial f(\mathbf{x})$. $((b) \Rightarrow (a))$ 过程同上逆过程. $((a) \Rightarrow (c))$ 若 f 为闭凸函数, $f = f^{**}$, 则

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y}) = f^{**}(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$$



共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

续.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y}) = f^{**}(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$$

由 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的对称关系, 应用 $(a) \Rightarrow (c)$, 知 $\mathbf{x} \in \partial f^*(\mathbf{y})$.

$((c) \Rightarrow (a))$ 应用 $(b) \Rightarrow (a)$,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = f^*(\mathbf{y}) + f^{**}(\mathbf{x}) = f^*(\mathbf{y}) + f(\mathbf{x})$$



共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

命题 14

设 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为适定闭凸函数, 则对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{E}^*$, 有

$$\partial f(\mathbf{x}) = \operatorname{argmax}_{\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{E}^*} \{\langle \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle - f^*(\tilde{\mathbf{y}})\},$$

及

$$\partial f^*(\mathbf{y}) = \operatorname{argmax}_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{E}} \{\langle \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle - f(\tilde{\mathbf{x}})\}.$$

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

定理 15

设 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ 为凸函数, 给定常数 $L > 0$, 下列陈述等价

(a) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}, |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|;$

(b) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}, \forall \mathbf{g} \in \partial f(\mathbf{x}), \|\mathbf{g}\|_* \leq L;$

(c) $\text{dom } f^* \subseteq B_{\|\cdot\|_*}[0, L].$

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

证明.

(c) $\Rightarrow$ (b) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}$, 设 $\mathbf{y} \in \partial f(\mathbf{x})$, 由定理 13,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$$

因为 $f(\mathbf{x}) \in (-\infty, +\infty)$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}$, 故

$$f^*(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - f(\mathbf{x}) \in (-\infty, +\infty).$$

因此 $\bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{E}} \partial f(\mathbf{x}) \subseteq \text{dom } f^*$.

(a) $\Rightarrow$ (c) 因为 $\mathbb{E}$ 为向量空间, $\mathbf{0} \in \mathbb{E}$. 由定理条件

$$f(\mathbf{0}) - f(\mathbf{x}) \geq -L\|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}$$



共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

续.

$$-f(\mathbf{x}) \geq -f(\mathbf{0}) - L\|\mathbf{x}\|$$

设 $\mathbf{y} \notin B_{\|\cdot\|_*}[0, L]$, 即 $\|\mathbf{y}\|_* > L$. 由对偶范数定义存在 $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{E}$, $\|\tilde{\mathbf{x}}\| = 1$, 使得 $\|\mathbf{y}\|_* = \langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle$. 定义 $C \triangleq \{\alpha \tilde{\mathbf{x}} : \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{E}$.

$$\begin{aligned} f^*(\mathbf{y}) &= \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{E}} \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - f(\mathbf{x})\} \\ &\geq \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{E}} \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - f(\mathbf{0}) - L\|\mathbf{x}\|\} \\ &\geq \max_{\mathbf{x} \in C} \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - f(\mathbf{0}) - L\|\mathbf{x}\|\} \\ &= \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\alpha \langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle - L\alpha \|\tilde{\mathbf{x}}\| - f(\mathbf{0})\} \\ &= \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\alpha(\|\mathbf{y}\|_* - L) - f(\mathbf{0})\} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

共轭函数

定义和基本性质

二次共轭函数

共轭函数计算法则

例子

Fenchel 对偶定理

共轭函数的次微分

续.

故若 $\mathbf{y} \notin B_{\|\cdot\|_*}[0, L]$, 则 $\mathbf{y} \notin \text{dom } f^*$.

